

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu  
Wydział Fizyki Astronomii i Informatyki Stosowanej



## **Analiza dźwięku dzwonu Tuba Dei**

Piotr Więclawski

Praca licencjacka napisana pod kierunkiem dr Krzysztofa Przegiętki

Toruń 2002

# Spis Treści

<b>Wstęp</b> .....	<b>3</b>
<b>Rozdział 1 Opis układu drgającego</b> .....	<b>6</b>
1.1 Oscylator harmoniczny .....	6
1.2 Fale .....	7
1.3 Dudnienia .....	9
1.4 Interferencja .....	10
<b>Rozdział 2 Akustyka</b> .....	<b>11</b>
2.1 Rozchodzenie się fal głosowych .....	11
2.2 Zjawisko Dopplera .....	12
2.3 Zjawiska głosowe.....	13
2.4 Dźwięk muzyczny .....	15
2.5 Skale muzyczne i systemy dźwiękowe .....	15
2.6 Struna .....	16
<b>Rozdział 3 Dzwony</b> .....	<b>18</b>
<b>Rozdział 4 Analiza widmowa</b> .....	<b>23</b>
4.1 Transformata Fouriera.....	23
4.2 Okienkowanie.....	25
4.3 Kodowanie dźwięku .....	26
4.4 Karty dźwiękowe.....	27
<b>Rozdział 5 Analiza dźwięku</b> .....	<b>29</b>
5.1 Pomiary .....	29
5.2 Widmo ogólne .....	30
5.3 Widmo ewolucyjne .....	35
5.4 Efekt Dopplera .....	39
<b>Zakończenie i wnioski</b> .....	<b>43</b>
<b>Literatura</b> .....	<b>44</b>

## Wstęp

Dzwon jest pochodzenia azjatyckiego i znany był już w starożytności. W Europie pojawił się po raz pierwszy w VI lub VII w. Od końca X w. dzwonom zaczęto nadawać imiona - po raz pierwszy uczynił to papież Jan XIII, który w 968 r. poświęcił dzwon w bazylice laterańskiej, nadając mu imię Jan. Z czasem dzwony zaczęto też określać nazwami symbolicznymi, np. Tuba Dei, Gratia Dei, Hosanna. W Polsce najstarsze z zachowanych dzwonów pochodzą z końca XIV w. Należą do nich m.in. dzwon Nowak z krakowskiej katedry oraz dzwon z kościoła farnego w Bieczu koło Gorlic. [5]

Spізowy dzwon Tuba Dei wisi na masywnej 52-metrowej wieży dzwonnej, której 4-metrowej grubości mury kryją także inne stare dzwony. Waży 7238 kg, a jego dolna średnica wynosi 217 cm [5]. Dzięki zamieszczonej na dzwonie inskrypcji znamy dokładny dzień odlania: ANNO DOMINI M. CCCC, XXII DIE SEPTEMBRIS EGO TUBA DEI IN LAUDEM DEI ET SANCTORUM JAHANNIS BAPTISTE ET EVANGELISTE PATRONUM HUIUS TEMPLI FUSA SUM („ja Trąba Boża zostałam ulana na chwałę Boga i świętych Jana Chrzciciela i Ewangelisty, patronów tejże świątyni, dnia 22 września Roku Pańskiego 1500”) . Aby umieścić dzwon na wysokości około 34 m, zbudowano drewnianą pochylnię o długości około 800 m, po której dzwon ten wciągało 7 dorodnych wołów. Z wydarzeniem tym wiąże się jedna z toruńskich legend. Warto zauważyć, że Tuba Dei do dziś pozostaje zawieszony na oryginalnym drewnianym belkowaniu. [5]



Tuba Dei w pełnej krasie [5].

Fot. Tomasz Jaworski

Jak głosi wieść dzwon został ulany przez Marcina Schmidta. Nie posiada zbyt wielu ozdób, u góry znajdują się pojedyncze kręgi, zaś niżej cztery reliefy: św. Katarzyny, św. Jana Chrzciciela, św. Barbary i św. Jana Ewangelisty. Na ulanie dzwonu o tak wyjątkowo dużych rozmiarach złożyło się kilka przyczyn. Prawie przez cały XV w. trwała przebudowa i rozbudowa kościoła. Zbudowano wtedy między innymi potężną wieżę, która jakby

oczekiwała zwieńczenia poprzez zawieszenie w niej dużego dzwonu. Ważną rolę mogły odegrać także względy ambicjonalne. W 1453 r. gdańszczanie odlali dzwon wielkich rozmiarów Gratia Dei, który ważył przeszło 6 ton i zawiesili go w kościele Mariackim. Być może Torunianie nie chcieli być gorsi i podjęli jeszcze większą inicjatywę, którą zrealizowali na przełomie wieków. Nie było w tym nic przypadkowego. Toruń po wojnach polsko-krzyżackich, dzięki dogodnemu położeniu i sprzyjającej koniunkturze gospodarczej, stał się jednym z najbogatszych miast w Polsce. W tym miejscu warto dodać że słynny renesansowy dzwon Zygmunta z katedry na Wawelu jest co prawda większy (12,7 tony) ale został ulany 20 lat po Tuba Dei. Być może, inspiracją dla ufundowania wawelskiego dzwonu przez króla Zygmunta Starego był znany mu z częstych pobytów w Toruniu dzwon Tuba Dei [5].

Dźwięk tego zabytkowego dzwonu, został poddany analizie widmowej, technice która oczywiście nie była jeszcze znana gdy Marcin Schmidt pracował nad swoim dziełem. Przy użyciu najnowszego sprzętu cyfrowego dokonano nagrania i poddano je analizie przy pomocy komputera, w celu ustalenia jak to wielkie ludwisarskie dzieło prezentuje się w liczbach i wykresach, obrazujących jego właściwości muzyczne. Pomimo kontrastu pomiędzy współczesną techniką cyfrową a średniowiecznym ludwisarstwem wyniki przeprowadzonych badań budzą podziw i respekt dla precyzji i kunsztu dawnego mistrza.

W tym miejscu chciałbym złożyć najserdeczniejsze podziękowania następującym osobą:

- Panu dr Krzysztofowi Przegiętce, promotorowi bez którego niniejsza praca w ogóle nie miałaby miejsca, za wiele ważnych spostrzeżeń, sugestii i pomysłów
- Księdzu Kanonikowi Markowi Rumińskiemu, proboszczowi katedry św. Janów w Toruniu; za wyrażenie zgody na badania
- Pani Elżbiecie Jakubowskiej, Dyrektor Wydawnictwa TNOiK Toruń; za znalezienie środków finansowych bez których niniejsza praca nie miała by podstaw
- Panu Mariuszowi Zaczkowskiemu, Kierownikowi Studia Nagrań Akademii Muzycznej im. St. Moniuszki w Gdańsku, za profesjonalne nagranie przy użyciu sprzętu wysokiej klasy
- Pani prof. Mariannie Sankiewicz i Panu prof. Gustawowi Budzyńskiemu z Politechniki Gdańskiej, za pomoc w nagraniu oraz bardzo cenne wskazówki
- Panu Mark'owi Hoogslag'enowi, za pomoc w kwestiach związanych z muzyką
- Panu Tomaszowi Jaworskiemu, za udostępnienie wspaniałego zdjęcia dzwonu Tuba Dei

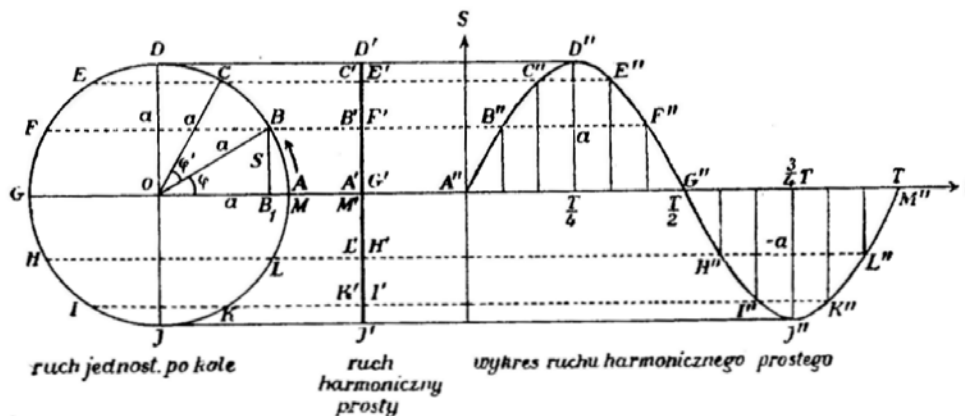
Na zakończenie, należy stwierdzić że w Polsce literatura na temat zabytkowych dzwonów, zarówno pod kątem badań historycznych jak i fizycznych jest stosunkowo uboga. Na uwagę zasługują pozycje [10] i [5] lecz z przyczyn obiektywnych dokładna analiza dźwięku Tuba Dei nie była wówczas możliwa.

# Rozdział 1 Opis układu drgającego

## 1.1 Oscylator harmoniczny

Rozpatrzmy rzut punktu poruszającego się ze stałą prędkością po okręgu na prostą (Rys.1.1). Można łatwo zauważyć że aktualne położenie punktu na prostej wynosi:

$$\psi = A \sin(\varphi). \quad (1.1)$$



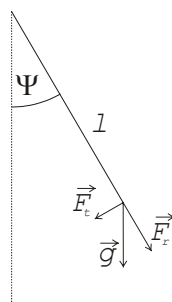
Rys. 1.1 Ruch po okręgu i jego rzut na oś czas – wychylenie [3]

Skoro mamy do czynienia ze stałą prędkością, to stała jest również prędkość kątową  $\omega$ , a więc otrzymujemy wzór:

$$\psi(t) = A \sin(\omega t), \quad (1.2)$$

który opisuje nam oscylacje harmoniczne.

Najprostszym oscylatorem harmonicznym jest wahadło matematyczne. Jest to punktowa masa zawieszona na nieskończenie cienkiej i nieważkiej nici (Rys. 1.2). W układzie tym zaniedbujemy siłę tarcia.



Rys. 1.2 Wahadło matematyczne.

Wychylenie ciężarka mierzone wzdłuż łuku jest równe  $l\psi$  natomiast jego przyspieszenie  $ld^2\psi/d^2t$ . Siła kierująca jest równa  $F_t = -Mg \sin \psi$ . Na podstawie drugiego prawa Newtona otrzymujemy równanie:

$$Ml \frac{d^2\psi}{dt^2} = -Mg \sin \psi. \quad (1.3)$$

Stosując do tego równania przybliżenie małych kątów, czyli kładąc  $\sin \psi \approx \psi$ , otrzymujemy klasyczne równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2 \psi, \quad (1.4)$$

gdzie:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (1.5)$$

Rozwiązaniem równania (1.4) jest nieco zmodyfikowana postać równania (1.1), a mianowicie:

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.6)$$

We wzorze tym  $A$  jest amplitudą drgań, czyli maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi,  $\omega$  to częstość kołowa drgań której kwadrat jest równy sile kierującej na jednostkę wychylenia i na jednostkę masy, natomiast  $\varphi$  jest przesunięciem fazowym i zależy wyłącznie od warunków początkowych.

W powyższych rozważaniach pominęliśmy siłę oporu powietrza, która będzie powodowała zanik drgań. Jednak siła ta będzie jedynie osłabiać amplitudę drgań nie wywierając wpływu na ich częstość jest to tzw. izochronizm drgań. Wzór (1.6) po uwzględnieniu siły oporu powietrza będzie się prezentował następująco:

$$\psi(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.7)$$

we wzorze tym wielkość  $\tau$  jest to średni czas życia oscylatora tłumionego, czyli czas po którym energia oscylatora maleje  $e$  razy.

## 1.2 Fale

Fale są to harmoniczne drgania rozchodzące się w przestrzeni np. fale na powierzchni wody. Takie fale są rozwiązaniem równania:

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2}. \quad (1.8)$$

W równaniu tym jak widać występuje zarówno czas  $t$  jak i położenie  $z$ , stała  $D$  jest zależna jedynie od rodzaju drgań jak i ośrodka drgającego. Rozwiązaniem równania (1.8) jest w ogólności fala biegnąca w postaci:

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz). \quad (1.9)$$

Pojawia się tutaj nowa wielkość  $-kz$  która zastępuje przesunięcie fazowe. Wynika to z tego, iż fala rozchodzi się zarówno w czasie jak i w przestrzeni. Dlatego kątową liczbę falową  $k$  można traktować dla przestrzeni podobnie jak częstość kołową  $\omega$  dla czasu, a co do wartości wynosi ona:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.10)$$

gdzie  $\lambda$  jest długością fali, czyli odległością między dwoma najbliższymi punktami o takiej samej fazie:

$$\lambda = vT, \quad (1.11)$$

Długość fali  $\lambda$  jest to więc droga jaką przebywa fala w ciągu jednego okresu drgań. Jak widać długość fali w danym ośrodku zależy od jej prędkości rozchodzenia się -  $v$ . W tym miejscu warto zauważyć, że prędkość dźwięku w powietrzu wynosi około 330 m/s, natomiast np. w mosiądzu 3500 m/s.

Drugą ważną wielkością opisującą fale jest częstotliwość, jest to odwrotność okresu jednego pełnego drgania harmonicznego -  $T$ :

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.12)$$

Częstotliwość mierzy się w hercach (Hz) i interpretuje jako liczbę impulsów (tu maksimów wychyleń) jakie pojawiają się w ustalonym punkcie w ciągu sekundy.

Istnieją dwa rodzaje fal: podłużne oraz poprzeczne. Większość fal obserwowanych w przyrodzie to fale poprzeczne, czyli takie w których periodyczne odchylenia od położenia równowagi są ukierunkowane prostopadle do kierunku propagacji fali. Przykładem takich fal mogą być wspomniane już wcześniej fale na wodzie. Natomiast fale podłużne jest to rodzaj fal, w których kierunek odkształcenia jest zgodny z kierunkiem propagacji fali, dźwięk jest właśnie przykładem takiej fali.

W opisie ruchu falowego ważna jest również jej propagacja czyli kierunek rozchodzenia się fali. Do najczęściej spotykanych fal należą fale kuliste oraz płaskie. Fale kuliste to najczęściej spotykany rodzaj fal, rozchodzą się one we wszystkich kierunkach czyli w obrębie



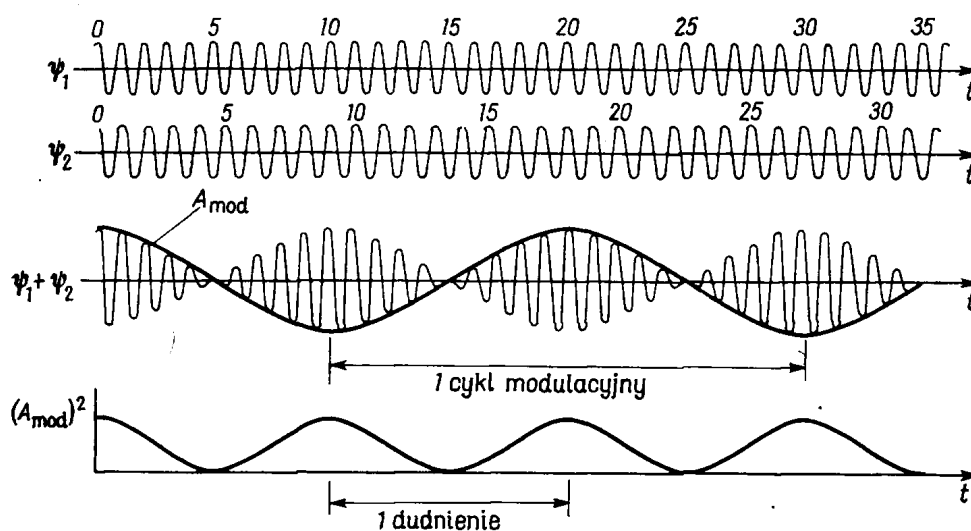
całego kąta bryłowego (kuli), a ich źródło jest zazwyczaj w dobrym przybliżeniu punktowe. Również fale dźwiękowe są zazwyczaj falami kulistymi, a za źródło punktowe można przyjąć np. wystrzał z pistoletu. Fale płaskie natomiast są to fale które rozchodzą się jedynie w jednym wyszczególnionym kierunku. W praktyce falę kulistą w dużej odległości od źródła można przyjmować z dobrym przybliżeniem jako falę płaską.

### 1.3 Dudnienia

Gdy w ośrodku drgającym nie rozchodzi się jedno ale kilka drgań harmonicznym wtedy wypadkowe drganie jest superpozycją drgań złożonych:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t, \quad (1.13)$$

gdy częstotliwości tych oscylatorów są do siebie zbliżone (ale nie są równe) mamy do czynienia z dudnieniami. Oznacza to, że wypadkowe drganie będzie odbierane jako drganie niemal harmoniczne, którego częstotliwość leży pomiędzy dwiema częstotliwościami składowymi, natomiast jego amplituda będzie zmieniała się w czasie (Rys. 1.3) z częstotliwością równą różnicy częstotliwości składowych.



Rys. 1.3 Dudnienia [1].

Częstość zmian tej amplitudy nazywa się częstotliwością modulacji, natomiast całe zjawisko nazywamy dudnieniami. Dudnienia są bardzo ważne w akustyce i są zjawiskiem niepożądanym (wywołują tzw. dysonanse – roz. 2).

## 1.4 Interferencja

Jeżeli weźmiemy pod uwagę dwa źródła drgań harmonicznycch o tej samej częstotści będące w pewnej odległości od siebie i wzbudzające drgania w tym samym ośrodku drgającym to będziemy mieli do czynienia z interferencją. Jest to nałożenie się dwóch fal w skutek czego mamy do czynienia z maksimami i minimami interferencyjnymi. Są to punkty w których odpowiednio nakładają się na siebie dwa maksima lub minima (wtedy następuje wzmocnienie fal) oraz maksimum i minimum (wygaszenie fal). Położenie punktów, w których następuje wzmocnienie bądź osłabienie fal zależy od różnicy dróg pokonanych przez fale zbiegające się w danym punkcie. Jeśli różnica ta odpowiada całkowitej wielokrotności długości fali następuje wzmocnienie zaś jeśli połowie długości fali to mamy do czynienia z wygaszeniem fali.

## Rozdział 2 Akustyka

Dzwon jako instrument muzyczny zaliczamy do instrumentów perkusyjnych (z grupy idiofonów) jest jednym z najbardziej skomplikowanych pod względem opisu drgań, jakie się w nim pojawiają po uderzeniu. Przyczyną jest jego skomplikowana budowa, tj. zróżnicowany profil boczny i zmienna grubość płaszczka. Właśnie dlatego ludwisarze pilnie strzegą tajemnic swojego warsztatu, które określają proporcje kształtu i grubości konieczne, aby dźwięk dzwonu był przyjemny dla ucha. Żeby przedstawić zjawisko powstawania dźwięku w dzwonach należy najpierw omówić kilka zagadnień z dziedziny fizyki jaką jest akustyka.

### 2.1 Rozchodzenie się fal głosowych

Jeżeli dany ośrodek zostanie pobudzony na skutek zetknięcia z jakimś drgającym ciałem sprężystym to mamy wtedy do czynienia z falą głosową. Każde uderzenie drgającego ciała powoduje lokalne zwiększenie gęstości ośrodka co prowadzi do wzrostu ciśnienia w tym miejscu (zmianę temperatury przy drganiach głosowych można zaniedbać). Dążąc z powrotem do osiągnięcia stanu równowagi cząsteczki napierają na sąsiednią warstwę ośrodka przekazując jej część swojej energii. W tym czasie ciało drgające odchyła się od powierzchni zetknięcia z ośrodkiem wchodząc w kolejną fazę drgania. Powoduje to z kolei rozrzedzenie się ośrodka. Takie zmiany gęstości następują po sobie cyklicznie (z częstotliwością drgań) i powodują powstanie fali podłużnej (Rys. 2.1). Zazwyczaj ośrodkiem, w którym rozchodzą się fale głosowe jest powietrze, jednak może nim być każde ciało o własnościach sprężystych. Prędkość dźwięku w danym ośrodku gazowym jest zależna od jego gęstości ( $\rho$ ) i ciśnienia ( $p$ ):

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (2.1)$$

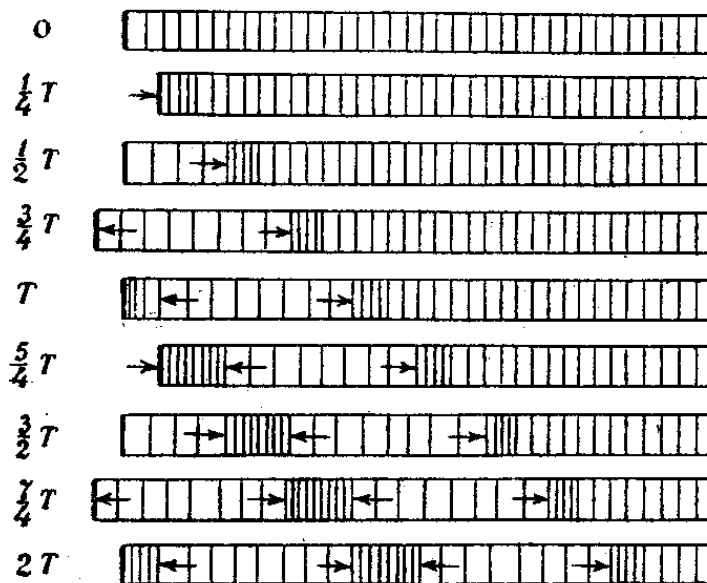
i w powietrzu w warunkach standardowych wynosi ok. 340 m/s. Natomiast w metalu prędkość ta (z reguły znacznie większa) zależy w przypadku drgań podłużnych od modułu Younga  $E$  i gęstości  $\rho$ :

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2.2)$$

zaś dla fal poprzecznych mamy:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (2.3)$$

gdzie  $G$  jest modułem sztywności danego materiału.



Rys. 2.1 Schemat rozchodzenia się fali dźwiękowej [3].

## 2.2 Zjawisko Dopplera

Ważnym zjawiskiem w akustyce jest zjawisko Dopplera. Obserwujemy je gdy obserwator lub źródło dźwięku znajduje się w ruchu. W takim przypadku częstotliwość dźwięku rejestrowana przez obserwatora jest inna niż ta emitowana przez źródło. Jeśli obserwator i źródło zbliżają się do siebie mamy do czynienia z pozornym podwyższeniem częstotliwości, natomiast w sytuacji odwrotnej częstotliwość odbieranego sygnału spadnie. Jest to spowodowane skończoną prędkością dźwięku. Dzięki temu obserwator poruszając się w kierunku źródła rejestruje fale dźwiękowe z podwyższoną częstotliwością i na odwrót. Zjawisko to opisuje wzór:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{v \pm v_o}{v \mp v_z} \quad (2.4)$$

w którym  $f$  jest częstością odbieraną,  $f_0$  częstością emitowaną przez źródło,  $v_o$  prędkością obserwatora,  $v_z$  prędkością źródła. Znaki górne plus w liczniku i minus w mianowniku

stosujemy gdy obserwator i źródło zbliżają się do siebie, natomiast znaki dolne minus w liczniku i plus w mianowniku w sytuacji przeciwnej.

## 2.3 Zjawiska głosowe.

Zjawiska głosowe wywołane przez drgania mechaniczne można podzielić na trzy kategorie: tony, dźwięki i szmery [3].

Ton jest to zjawisko głosowe wywołane przez drganie proste, którego obrazem graficznym jest sinusoida. Dźwięk jest współbrzmieniem wielu tonów o wymierzalnej częstotliwości drgań; poszczególne tony nazywamy wówczas tonami składowymi. Szmer jest również współbrzmieniem tonów składowych tyle że o niewymierzalnej częstotliwości drgań, ze względu na łączne występowanie wszelkich możliwych częstotliwości z danego przedziału, których jest nieskończenie wiele.

Zjawiska głosowe posiadają również cechy, takie jak: wysokość, natężenie, barwę i czas trwania. Wysokość zależy od częstotliwości drgania, natężenie od jego amplitudy natomiast barwa od ilości tonów składowych, jak i ich względnego natężenia. Czas trwania zjawiska głosowego jest to czas jaki potrzebuje fala na przejście przez określony punkt w danym ośrodku. Jedynie dźwiękom można przypisać wszystkie trzy cechy, natomiast tony posiadają jedynie wysokość, a szmery barwę.

W muzyce cechy te nie są określane tak ściśle jak fizycy sobie by tego życzyli. Wysokość określa się systemem notacji nut na pięciolinii, czas trwania określa wartość nuty i tempo utworu. Te dwie cechy choć można by powiedzieć, że nieco „dziwacznie” są jednak dość dobrze określone poprzez pewne standardy. Niestety pozostałe dwie cechy są określone bardzo niedokładnie, a mianowicie barwę określają nazwy instrumentów muzycznych, natomiast natężenie określają tzw. określenia dynamiczne np. *piano* – cicho, *forte* – głośno, itp.

W akustyce ośrodek, w którym rozchodzą się drgania nazywa się polem głosowym. Natężeniem głosu ( $I$ ) określa się energię fali akustycznej, przepływającą w jednej sekundzie przez  $1 \text{ cm}^2$ . Praktyczną jednostką natężenia jest  $[\mu\text{W}/\text{cm}^2]$ . W polu głosowym można również mierzyć ciśnienie głosu ( $P$ ). Między tymi dwiema wielkościami zachodzi związek:

$$I = \frac{P^2}{vG} \quad (2.5)$$

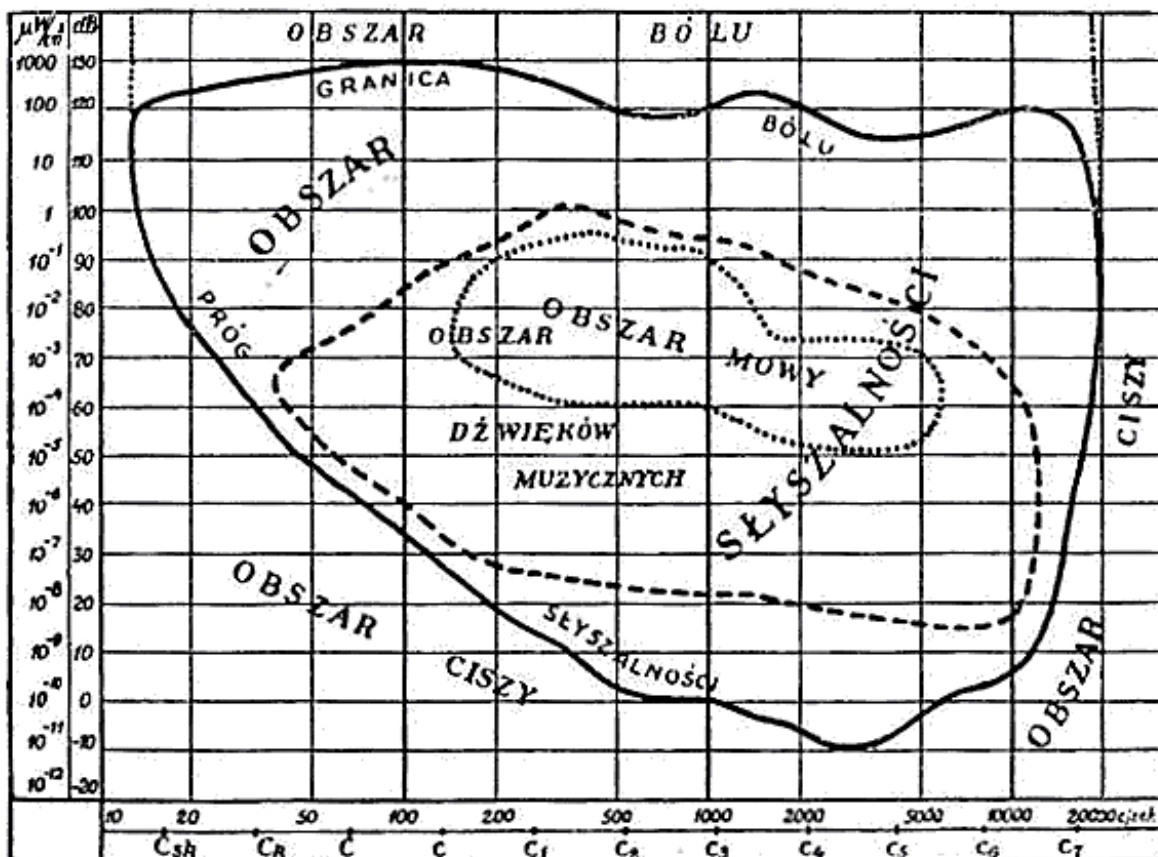
gdzie:  $v$  jest prędkością dźwięku, a  $G$  gęstością ośrodka.

Zakres słyszalności ludzkiego ucha wynosi:  $10^{-10} - 10^3 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ . Jednak wrażenie słuchowe nie zmienia się liniowo z natężeniem lecz z jego logarytmem (prawo Webera-Fechnera). Dlatego zdefiniowano nową wielkość zwaną intensywnością, której jednostką jest „bel”, w praktyce wartości podaje się w decybelach (dB). Wartość intensywności definiuje następujący wzór:

$$i = 10 \log \frac{I}{I_0} = 20 \log \frac{P}{P_0} \quad (2.6)$$

w którym:  $i$  jest to intensywność w dB,  $I_0$  najniższa praktycznie wykrywalna intensywność ( $I = 10^{-10} \mu\text{W}/\text{cm}^2$ ),  $P_0$  odpowiadająca tej wartości wartość ciśnienia głosu.

Zakres słyszalności ludzkiego ucha nie odnosi się tylko do intensywności dźwięku ale również do jego częstotliwości. Oznacza to, że nie jesteśmy w stanie usłyszeć wszystkich fal akustycznych jakie do nas docierają. Zakres ten wynosi mniej więcej od 16 Hz do 20 kHz przy czym maksimum występuje dla około 4 kHz. Dźwięki powyżej 20 kHz zwane są ultradźwiękami, natomiast te poniżej 16 Hz nazywamy infradźwiękami. Zakres słyszalności ludzkiego ucha prezentuje rys. 2.2.



Rys. 2.2. Zakres słyszalności ludzkiego ucha [3]

Określenie natężenia dźwięku odpowiadające wrażeniom słuchowym wyraża się w fonach. Skala ta uwzględnia zarówno natężenie dźwięku w dB jak i częstotliwość.

## 2.4 Dźwięk muzyczny

Podstawowym pojęciem jakie istnieje w muzyce jest interwał, czyli stosunek częstotliwości dwóch dźwięków (o różnej wysokości). Interwały były niegdyś dzielone na konsonansowe jak i dysonansowe. Konsonans jest to interwał brzmiący łagodnie i przyjemnie dla ucha, natomiast dysonans jest to bardzo źle odbierane współbrzmienie dwu dźwięków, można by powiedzieć, że dźwięki te do siebie nie pasują. Słowo „niegdyś” nie zostało tu użyte przypadkowo, ponieważ w 1890 r. K. Stumpf wygłosił swoją teorię [3] że zjawisko konsonansu jak i dysonansu jest zjawiskiem czysto psychologicznym. Przykładem tego jest współczesna muzyka, która używa interwałów które przez Mozarta czy Beethovena uznane zostałyby za zdecydowanie dysonansowe. Mianem dysonansu określa się grupę interwałów brzmiących niezgodnie (ostro). Należą do nich sekunda, septyma, kwarta zwiększona. Podstawowe interwały konsonansowe zawiera tabela 2.1 [6].

Tabela 2.1. Podstawowe interwały konsonansowe [6].

nazwa	stosunek częstotliwości
pryma	1:1
oktawa	2:1
kwinta	3:2
kwarta	4:3
tercja wielka	5:4
tercja mała	6:5

## 2.5 Skale muzyczne i systemy dźwiękowe

Aby omówić systemy muzyczne należy zauważyć, że dwa dźwięki odległe od siebie o oktawę mają tzw. wspólną jakość tonalną. Wyraźnie słychać że jeden jest wyższy, a drugi niższy ale wydają się być do siebie podobne w przeciwieństwie do dźwięków odległych o inne interwały.

Jedną z najstarszych skal muzycznych jakie znamy jest **pentatonika** [6]. Jest to skala pięciostopniowa wywodząca się z Chin, którą odtworzyć można naciskając na fortepianie pięć kolejnych czarnych klawiszy w obrębie oktawy. Jednak dla muzyki europejskiej dużo

ważniejsza jest skala zwana **diatoniką**, opierająca się na siedmiu stopniach (białe klawisze na fortepianie). Pitagoras wraz ze swoimi uczniami pokazał że pentatonikę można wyprowadzić posługując się jedynie interwałami kwinty i oktawy, skalę tę nazywamy pitagorejską. Natomiast w I w. p.n.e. Didymos zaproponował dużo prostsze wyprowadzenie opierając się na oktawie, kwincie oraz tercji wielkiej. W skali tej jest bardzo wiele „dobrych” konsonansów z tego powodu nazwano ją **skalą naturalną**. Wyprowadza się ją intonując (dodając) kolejne interwały. Z matematycznego punktu widzenia intonacja to po prostu mnożenie kolejnych współczynników przy interwałach, natomiast odejmowanie to ich dzielenie. I tak mamy c – podstawowy dźwięk o współczynniku 1, c<sup>1</sup> – odległy o oktawę od c (wsp. 2), e – tercja od c ( $\frac{5}{4}$ ), f – kwarta ( $\frac{4}{3}$ ), g – kwinta ( $\frac{3}{2}$ ), a – stanowi intonacje kwarty i tercji ( $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$ ), h – to intonacja kwinty i tercji ( $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$ ), ostatni dźwięk to d uzyskiwany poprzez dodanie do siebie dwóch kwint i transpozycję (przesunięcie) o oktawę w dół ( $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \div 2 = \frac{9}{8}$ ). W ten sposób otrzymujemy skalę naturalną: c, d, e, f, g, a, h, c<sup>1</sup>.

Powyżej zostały zaprezentowane skale (złożenia interwałów), jeśli chcemy natomiast mówić o systemie dźwiękowym to musimy posługiwać się metodą, która pozwala na taki podział oktawy umożliwiający swobodne konstruowanie skali od dowolnego tonu [6]. Takim systemem jest właśnie **system równomiernie temperowany**. Dzieli on oktawę na dwanaście części (półtony temperowane). Matematycznie przedstawia się on następująco: szukany interwał będący jedną dwunastą częścią oktawy oznaczamy przez  $q$ , zakładając że intonacja dwunastu takich interwałów daje oktawę, otrzymujemy:

$$q^{12} = 2 \Rightarrow q = \sqrt[12]{2} \approx 1,0594 . \quad (2.7)$$

Interwał ten jest liczbą niewymierną i nie da się przedstawić jako stosunek liczb całkowitych. Ucho ludzkie nie jest tak wrażliwie na zmianę wysokości dźwięków i dlatego system równomiernie temperowany jako wygodniejszy jest stosowany obecnie. I tak dla przykładu kwinta czysta różni się od kwinty temperowanej jedynie o 2 centy (cent jest jednostką miary interwałowej i stanowi on jedną setną półtonu temperowanego).

## 2.6 Struna

Zanim zostaną omówione szczegółowo drgania dzwonów warto najpierw przyjrzeć się drgającej strunie. Po napięciu struny i następnym jej zwolnieniu (struny można również uderzać lub pocierać smyczkiem) struna samoczynnie powraca do położenia równowagi, a następnie przechodzi przezeń wychylając się w drugą stronę, na skutek czego powstaje fala

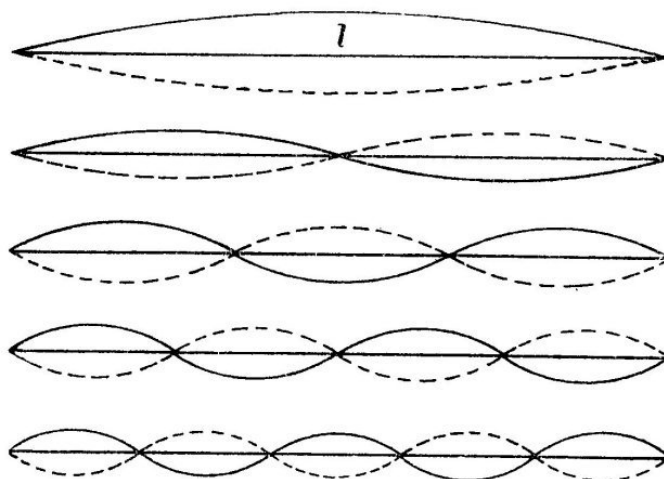


stojąca. Jest to tak zwany pierwszy mod drgań inaczej mówiąc ton podstawowy, o długości fali dwa razy większej od długości struny. Jego częstotliwość można obliczyć w następujący sposób:

$$f_1 = \frac{k}{Lr} \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (2.8)$$

w którym  $L$  jest długością struny,  $r$  jej średnicą,  $P$  napięciem struny,  $\rho$  gęstością materiału z jakiego jest wykonana,  $k$  stałą proporcjonalności.

Oprócz drgania podstawowego struna wykonuje jeszcze szereg innych drgań o częstotliwości  $n$ -krotnie większej ( $n = 1, 2, 3$  itd.) tworząc szereg harmoniczny (Rys. 2.3). Są to tak zwane wyższe tony składowe (aliquoty) i oznaczamy je kolejno liczbami całkowitymi. Zdarza się również, że kolejne tony nie są całkowitymi wielokrotnościami tonu podstawowego - wtedy oznaczamy je liczbami rzymskimi.



Rys. 2.3. Alikwoty drgającej struny o długości  $l$  zamocowanej na końcach [3].

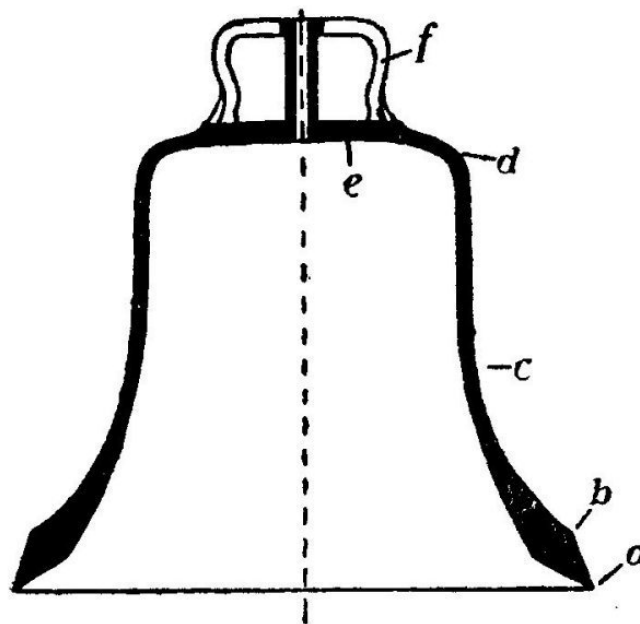
Warto w tym miejscu wspomnieć o dwóch prawach jakie mają zastosowanie wśród wszystkich ciał drgających, są to tak zwane prawa Younga:

1. jeśli ciało sprężyste pobudzić do drgań w określonym miejscu, to w miejscu tym powstanie strzałka, nie może zaś powstać węzeł
2. jeśli powstrzymać drgania ciała sprężystego w określonym miejscu, to w miejscu tym powstanie węzeł, a nie może powstać strzałka.

W praktyce oznacza to że miejsce pobudzenia struny do drgań ma wpływ na barwę jej dźwięku. Czyli szarpiąc strunę w połowie jej długości uzyskamy dźwięk łagodny natomiast szarpiąc w pobliżu punktu mocowania uzyskamy dźwięk dość ostry, „metaliczny” bogaty w tony harmoniczne.

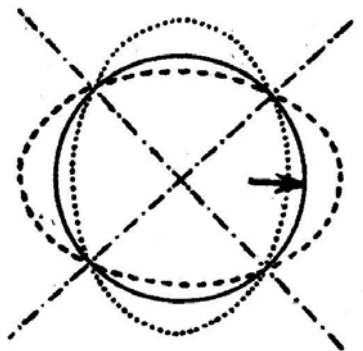
## Rozdział 3 Dzwony

Dzwony są pod względem akustycznym uważane za silnie wygięte płyty i jako instrumenty muzyczne zalicza się je do klasy idiofonów. Ich wygięcia nie uzyskuje się przez kucie, dzwony odlewa się od razu w zadanym kształcie, wygięcie to nadaje dzwonowi wewnętrzne naprężenie, podobnie jak naciągnięcie struny lub napięcie membrany bębna. Materiałem, z którego najczęściej wykonuje się dzwony jest spiż, stop składający się z 80% miedzi i 20% cyny. Poza tym dzwony wykonuje się również ze stali, rzadziej szkła i porcelany. Dzwon w swojej budowie podzielony jest na sześć części: skrajna część kielicha dzwonu znana krawędzią (a) przechodzi w najgrubszą część kielicha – wieniec (b), następnie mamy mniej więcej jednolity płaszcz (c), który wygina się w hełm (d) składający się z płyty (e) oraz korony (f) pełniącej jedynie funkcję mocującą. Dźwięk w dzwonie kołysany wydobywany jest za pomocą tzw. serca dzwonu wykonanego zazwyczaj ze stopów żeliwnych. Serce jest umieszczone wewnątrz dzwonu na specjalnie przygotowanych pasach skórzanych pozwalających mu na swobodne „bujanie się”.



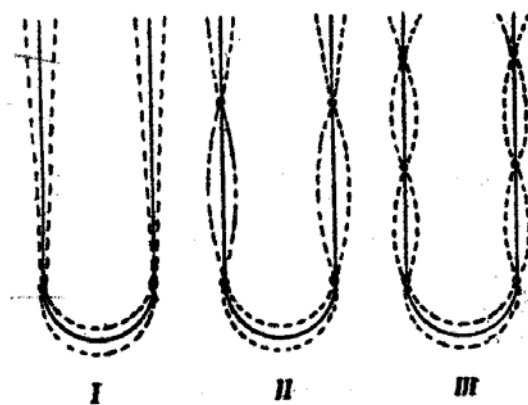
Rys. 3.1. Budowa dzwonu. a – krawędź, b – wieniec,  
c – płaszcz, d – hełm, e – płyta, f – korona [3].

Żeby zrozumieć w jaki sposób w dzwonach powstaje dźwięk należy sobie wyobrazić co dzieje się w momencie uderzenia serca w kielich dzwonu. Otóż serce po uderzeniu w wieniec powoduje odkształcenie okręgu w elipsę. Następnie siły sprężystości dzwonu powodują zmianę kształtu tej elipsy poprzez zamianę jej osi. Sytuację tę, ze znaczną przesadą w celu ilustracji zjawiska, przedstawia rys. 3.1. Jeżeli teraz wyobrazimy sobie dzwon jako nieskończenie wiele pierścieni połączonych ze sobą jeden przy drugim i podlegających takim odkształceniom, to otrzymamy drganie jakiemu podlega dzwon czyli falę stojącą. Prowadzi to do powstania czterech linii węzłowych zwanych południkowymi, które rozciągają się od płaszcza aż po krawędź. Odkształcenia powodowane lokalnymi rozciągnięciami i ściśnięciami prowadzą również do powstania fali podłużnej wzdłuż profilu dzwonu, ale nie jest ona znacząca dla brzmienia dzwonu.



Rys. 3.2. Podstawowy mod drgania krawędzi dzwonu (przekrój poprzeczny) [3].

Kolejnym uproszczeniem jakie można sobie wyobrazić jest dzwon przecięty pionowo na pół, z którego wydzielamy następnie cienki plasterzek [11]. W rezultacie otrzymujemy coś w rodzaju widełek stroikowych (Rys. 3.3). Drgania dzwonu można bardzo dobrze przybliżyć właśnie za pomocą opisu ich drgań, należy jednak pamiętać że płyta dzwonu stanowi węzeł gdyż w tym właśnie miejscu zamocowana jest korona.

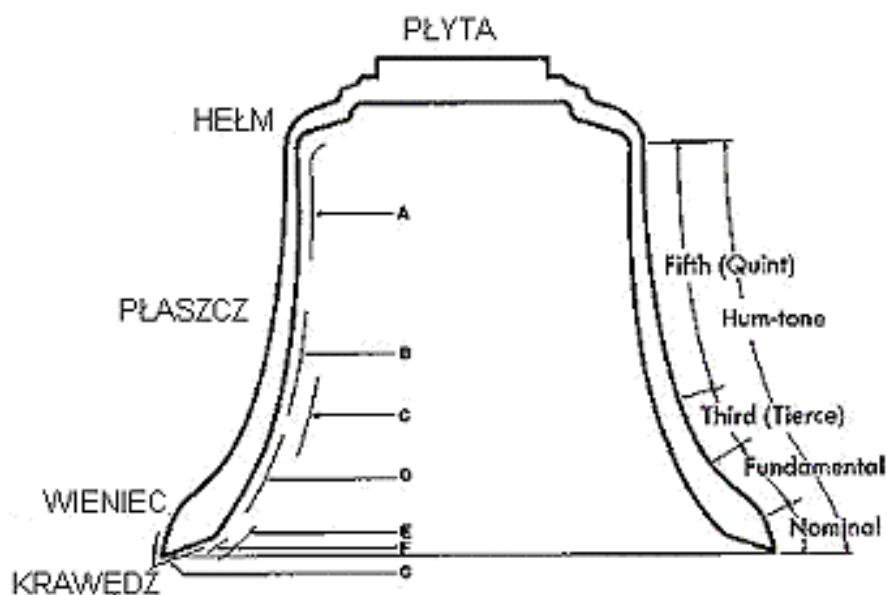


Rys 3.3. Drgania widełek stroikowe jako model drgającego dzwonu. [3]

W drganiach widełek pierwszy węzeł (w dzwonach węzeł ten, a raczej linia węzłowa pojawia się w postaci równoleżnika) pojawia się u ich nasady, podobnie jak w dzwonie w obszarze hełmu. Jednakże w przypadku widełek stroikowych inne częstotliwości (kolejne węzły) w zasadzie się nie pojawiają, co w przypadku dzwonów nie jest prawdą. Jest to spowodowane specjalnie zaprojektowanymi zmianami przekroju dzwonu tj. zmianami grubości ścianki jak i średnicy w funkcji wysokości. Dzięki takiej sytuacji można zaobserwować jeszcze co najmniej jeden równoleżnik w pobliżu środka płaszcza i co za tym idzie drgania o wyższych częstotliwościach. Jako że odkształcenia przekroju poprzecznego nie są dokładnie elipsami można zaobserwować więcej południkowych linii węzłowych czyli kolejne mody drgania podstawowego tzw. dolnej oktawy (ang. *hum tone*). Biorąc pod uwagę te dwa rodzaje odkształceń jak i to że liczba południków może dochodzić do dziesięciu dochodzimy do ośmiu tonów składowych, których nazwy, kolejność jak i układ linii węzłowych zebrano w tabeli 3.1.

Tabela. 3.1 Kolejne tony powstające w dzwonie [3].

Nazwa tonu (nazwa angielska)	Liczba porządkowa	Układ linii węzłowych
dolna oktawa (hum)	I	4 południki
pryma (fundamental)	II	4 południki i równoleżnik
tercja (tierce)	III	6 południków
kwinta (quint)	IV	6 południków i równoleżnik
oktawa( nominal)	V	8 południków
decyma	VI	8 południków i równoleżnik
duodecyma	VII	10 południków
podwójna oktawa	VIII	10 południków i równoleżnik



Rys. 3.4 Obszary wzbudzenia kolejnych tonów w dzwonie zaznaczono po prawej stronie, objaśnienia angielskich terminów podano w tekście poniżej. Literami od A do G oznaczono miejsca, których szlifowanie wpływa na tony, w następujący sposób: A - obniża oktawę dolną oraz prymę, B - obniża kwintę, C - obniża tercję i oktawę, D - obniża prymę, E - podwyższa prymę, F - obniża oktawę, G - podwyższa oktawę [11].

Zmiany w profilu dzwonu mają nie tylko wpływ na częstotliwości jakie można z niego wydobyć, ale również na ich intensywność. Różne tony zawarte w tabeli 3.1 są wzbudzane w różnych partiach dzwonu i tak: pryma (ang. *fundamental*) wzbudzane są tuż nad wieńcem, oktawa (ang. *nominal*) w pobliżu krawędzi, dolna oktawa (ang. *hum tone*) wzbudzana jest na całej wysokości dzwonu ale najgłośniej brzmi w okolicach krawędzi, tercja (ang. *tierce*) wzbudza się w dolnej części płaszcza, natomiast kwinta (ang. *quint*) jest zlokalizowana zaraz

nad nią i sięga aż po hełm. Dokładniej obrazuje to rysunek 3.4. Poprzez wytaczanie od wewnątrz dzwonu na odpowiednich wysokościach można zmieniać częstotliwość pewnych tonów polepszając tym samym inne. Zmiany te wpływają szczególnie na właściwości rezonansowe dzwonów. Takie metody stosowane są przede wszystkim w dzwonach karilionowych (dzwony używane do wygrywania różnych melodii) które muszą ze sobą współbrzmieć niemal idealnie. Na rysunku 3.4 pokazano również jak szlifowanie różnych partii dzwonu zmienia wysokości danych tonów.

Unikalność dzwonów jako instrumentów muzycznych ujawnia się w ich brzmieniu. Nie są one słyszane jako jeden dźwięk o danej częstotliwości i barwie, ale jako akord dwóch dźwięków. Jest to zjawisko o tyle dziwne, że współczesna nauka nie jest w stanie wytłumaczyć tego fenomenu. Drugie podobnie niewytłumaczalne zjawisko to obecność w dźwięku niektórych dzwonów jednego bardzo silnego kombinacyjnego tonu różnicowego [3] i [6]. Jest to ton powstały poprzez odjęcie od siebie dwóch tonów składowych, zazwyczaj VII i V. Ton różnicowy jest jedynie słyszalny, nie daje się go zarejestrować w widmie co oznacza, że powstaje dopiero jako wrażenie słuchowe. Unikalność tego efektu wiąże się z trudnością badania go i jak można przypuszczać wiązała się z niedokładnością metod stosowanych w latach 30 dwudziestego wieku. Według niektórych badaczy ton różnicowy słyszalny był zaraz po uderzeniu w tzw. fazie nabrzmiewania dzwonu, kiedy był on znacznie głośniejszy od pozostałych tonów. Występowania tonu różnicowego w dźwięku Tuba Dei nie udało się stwierdzić.

# Rozdział 4 Analiza widmowa

## 4.1 Transformata Fouriera

Żaden naturalny sygnał dźwiękowy jaki słyszymy nie jest idealnym drganiem harmonicznym, lecz złożeniem drgań harmonicznymi i nieharmonicznymi.

W badaniu takich dźwięków przychodzi nam z pomocą twierdzenie Fouriera: *Każdy sygnał okresowy stanowi superpozycję prostych drgań harmonicznymi.* Twierdzenie to ma zbudowany przez Fouriera aparat matematyczny, a mianowicie szereg Fouriera da się zapisać jako:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi nft) + b_n \sin(2\pi nft)], \quad (4.1)$$

gdzie  $f = \frac{1}{T}$  jest częstotliwością z jaką powtarza się sygnał, natomiast  $t$  jest czasem. We wzorze tym występują współczynniki Fouriera:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nft) dt \quad (4.2)$$

oraz

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nft) dt. \quad (4.3)$$

Można nieco uprościć wszystkie trzy wzory stosując wzory Eulera:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad (4.4)$$

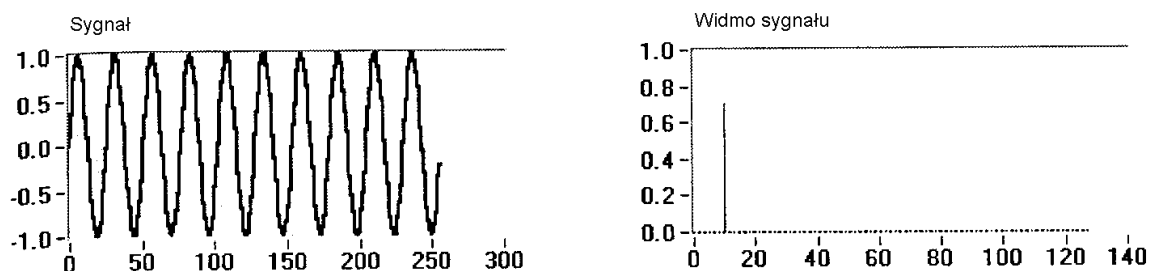
otrzymujemy:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n f t}, \quad (4.5)$$

gdzie z kolei wartość współczynników Fouriera wynosi:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi i n f t} dt. \quad (4.6)$$

Te właśnie współczynniki będące liczbami zespolonymi tworzą dyskretne widmo sygnału, natomiast moduły tych współczynników tworzą widmo amplitudowe, czyli zależność typu częstotliwość-amplituda. Przykładowy sygnał wejściowy i jego widmo pokazano na rys. 4.1.



Rys 4.1. Sygnał sinusoidalny oraz jego widmo [8].

Jednak jak już wspomniano w rzeczywistości właściwie nie sposób wygenerować sygnału zawierającego jedynie częstotliwości harmoniczne, w takim przypadku zamiast sumować całkujemy otrzymując:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{ift} df, \quad (4.7)$$

w którym współczynniki  $c_n$  zastąpiła ciągła funkcja  $X(f)$ . Ciągłe widmo sygnału  $X(f)$  jest tak zwaną transformatą Fouriera, która polega na przekształcenia rzeczywistego sygnału z reprezentacji czas-amplituda na częstotliwość-amplituda.

Zazwyczaj sygnał jaki dostajemy na drodze rejestracji jakiegoś zjawiska nie jest okresowy (szczególnie w przypadku sygnałów dźwiękowych). Z tego powodu cały próbkowany sygnał o czasie trwania  $\Delta T$  jest brany jako jeden okres periodycznie się powtarzający (z okresem  $\Delta T$ ). Zakładamy przy tym, że sygnał posiada składowe częstotliwości z zakresu  $\langle -f_0, f_0 \rangle$ . Następnie chcąc utworzyć funkcję okresową żądamy aby okresowość widma sygnału  $X(f)$  wynosiła  $F$ :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(f - nF), \quad (4.8)$$

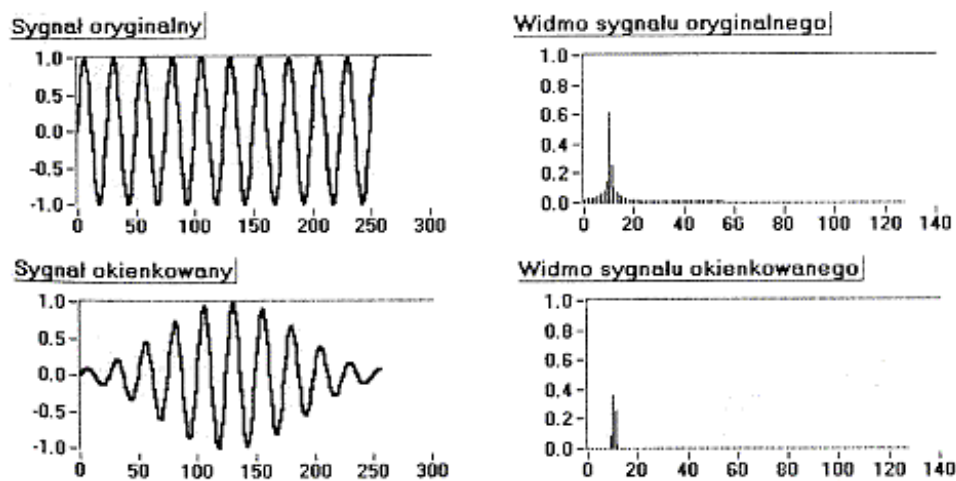
Okazuje się, że  $F$  ma znaczenie częstotliwości próbkowania sygnału. Twierdzenie Shannona mówi, że częstotliwość próbkowania sygnału winna być co najmniej dwa razy większa od największej częstotliwości występującej w widmie badanego sygnału [4]. Minimalna częstotliwość próbkowania ( $2f_0$ ) nazywa się częstotliwością Nyquista [8].

$$f_0 = \frac{F}{2}. \quad (4.9)$$



## 4.2 Okienkowanie

Mimo iż sam sygnał może się powtarzać w czasie bardziej lub mniej dokładnie to na pewno częstotliwości harmoniczne składające się na niego powtarzają się bez przerwy. Dlatego też bardzo ważny jest problem okienkowania. Okienkowanie jest to wycinanie z sygnału wejściowego sygnału do analizy o skończonej długości czasu  $\Delta T$ . Matematycznie polega to na złożeniu funkcji okienkowej z tymże sygnałem. Na rys. 4.2 przedstawiono przykładowy sygnał wejściowy w postaci funkcji sinusoidalnej oraz sygnał okienkowany metodą Hanninga i odpowiadające im widma.



Rys. 4.2. Przykładowe widmo sygnału o niecałkowitej liczbie cykli bez i z zastosowaniem okienkowania metodą Hanninga [8].

Okienkowanie stosowane jest w celu zlikwidowania tzw. efekt przecieku, chodzi tu o przeciek energii w widmie z linii o jednej częstotliwości do sąsiednich co powoduje rozmycie widma [8]. Z efektem przecieku mamy do czynienia gdy dana częstotliwość nie mieści się całkowitą liczbę razy w naszym zmierzonym sygnale, wtedy na skutek sklejanie takich niepełnych okresów powstaje nieciągłość która prowadzi do przecieku. Skutkiem przecieku jest powstanie tzw. listków bocznych czyli pojawienie się częstotliwości sąsiednich wzgl. składowej głównej, których nie zawiera w rzeczywistości sygnał wejściowy. Okienkowanie ma na celu „wygładzenie” sygnału na jego końcach tak aby przy jego powtarzaniu nie było nieciągłości. Jednak stosowanie metody okienkowania (z wyjątkiem okna prostokątnego) wiąże ze sobą również efekty uboczne, a mianowicie spadek amplitudy składowych linii otrzymanego widma. Wielkość tego efektu zależy oczywiście od doboru okna.

Dobór rodzaju okna zależy od rodzaju sygnału jaki zamierzamy analizować. Poniżej przedstawiono niektóre rodzaje okien i ich zastosowanie [8]:

- okno prostokątne – bardzo dobrze nadaje się do analizy sygnałów przejściowych, czyli takich które samoistnie pojawiają się i zanikają więc nie trzeba ich wygładzać, stosowane również gdy mamy pewność że sygnał mieści się w długości okna całkowitą ilość razy, okna te charakteryzują się brakiem spadku amplitudy w widmie sygnału okienkowanego;
- okno eksponencjalne – używane do analizy sygnałów przejściowych gdy sygnał jest dłuższy niż samo okno;
- okno Hanninga – stosowane do analizy sygnałów nie będących sygnałami przejściowymi;
- okno Hamminga – podobnie jak okno Hanninga różni się jedynie nieco kształtem ;
- okno typu „flat top” – bardzo przydatne do dokładnej analizy amplitudy pojedynczych składowych widma dobrze odizolowanych od reszty;
- okno typu Kaisera-Bessela – stosowane do sygnałów znacznie różniących się amplitudami jednak o bardzo zbliżonych częstotliwościach

Na zakończenie należy zauważyć, że długość okna  $\Delta T$  wyciętego z sygnału do analizy ogranicza rozdzielczość otrzymanego widma. W najkorzystniejszym przypadku widma prostokątnego rozdzielczość ta wynosi:

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta T} . \quad (4.10)$$

### 4.3 Kodowanie dźwięku

Istnieje wiele standardów zapisu dźwięku w postaci cyfrowej, jednak ich pomysłodawcy zawsze mają jeden cel: jak najlepsza jakość przy jak najmniejszej objętości. Zazwyczaj każdy standard jest charakteryzowany przez trzy parametry:

- częstotliwość próbkowania – wyjaśniony już powyżej parametr mówiący o liczbie zapisywanych próbek w czasie jednej sekundy
- przepływność lub inaczej rozdzielczość – parametr ten mówi o tym ile bitów jest zapisywanych na sekundę czyli inaczej mówiąc z jaką dokładnością jest zapisywana amplituda sygnału
- liczba kanałów – czyli liczba ścieżek jaka jest zapisywana jednocześnie

Poniżej w tabeli 4.1 zaprezentowano niektóre ze standardów kodowania dźwięku

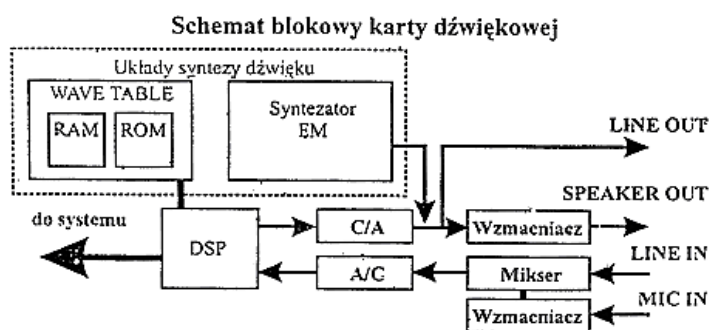
Tabela 4.1 Niektóre standardy kodowania dźwięku cyfrowego [9].

	Liniiowy PCM	Dolby Digital (AC-3)	MPEG-1	DTS
Częstotliwość próbkowania	48 lub 96 kHz	48 kHz	48 kHz	48 kHz
Maksymalna przepływność	6,144 Mb/s	448 kb/s	384 kb/s	1,5 Mb/s
Maksymalna liczba kanałów	8	5.1	2	5.1

W standardzie AC-3 oraz DTS pojawia się dość dziwna liczba kanałów. Jest to jednak oznaczenie mówiące o tym iż jeden kanał – szósty jest specjalnym kanałem niskoczęstotliwościowym o paśmie przenoszenia 30-120 Hz. Kanał ten jest zazwyczaj podłączany do specjalnego niskotonowego głośnika zwanego subwoofer'em. Każdy z wyżej wymienionych standardów (oprócz PCM) posiada własną kompresję. Metoda ta polega zazwyczaj na nie zapisywaniu dźwięków nierozróżnialnych dla ludzkiego ucha (zjawiska maskowania tonów składowych). Jest ona bardzo skuteczna, jednak w pewnych przypadkach (jak na przykład niniejsza praca) zawodzi gdyż nie mając do dyspozycji wszystkich częstotliwości docierających do mikrofonu niemożliwa jest pełna analiza dźwięku. Dlatego w pracy tej stosowano standard PCM – kodujący pełną informację o dźwięku i zajmujący najwięcej pamięci.

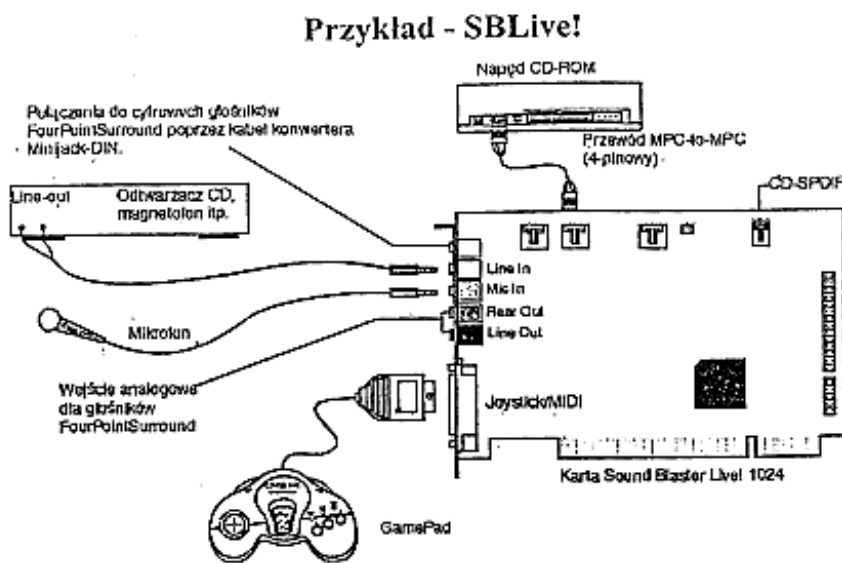
#### 4.4 Karty dźwiękowe

Do nagrania, odtwarzania i przetwarzania dźwięku w komputerze klasy PC należy wyposażyć go w specjalny moduł zwany potocznie kartą dźwiękową (Rys. 4.3).



Rys. 4.3 Schemat blokowy karty dźwiękowej. [7]

Karta taka składa się z przetworników AC (Analogowo-Cyfrowych) oraz CA (Cyfrowo-Analogowych), wzmacniacza, układu syntezy dźwięku oraz serca samego urządzenia czyli jednostki DSP (Digital Signal Processor). Układ przetworników jest umieszczony na wejściach oraz wyjściach karty dźwiękowej, wzmacniacz służy do wzmocnienia zarówno wyjścia na głośniki jak i wejścia mikrofonowego. Jednostka syntezy dźwięku stosuje odwrotną transformatę Fouriera w celu sztucznej emulacji różnych instrumentów, dane o właściwościach każdego z nich przechowywane są w pamięci typu ROM (Read Only Memory) i w razie potrzeby kopiowane i przetwarzane w pamięci typu RAM (Random Acces Memory), natomiast cała jednostka ROM+RAM nosi nazwę Wave Table. Natomiast DSP jest to mikroprocesor służący do „nakładania” na sygnał dźwiękowy różnych efektów akustycznych takich jak: Reverb – (opóźnianie sygnału emulujące efekt echa), czy Distortion (przesterowanie sygnału, efekt znany z muzyki rockowej). Poniżej, na rys 4.4 przedstawiono przykładową kartę dźwiękową.

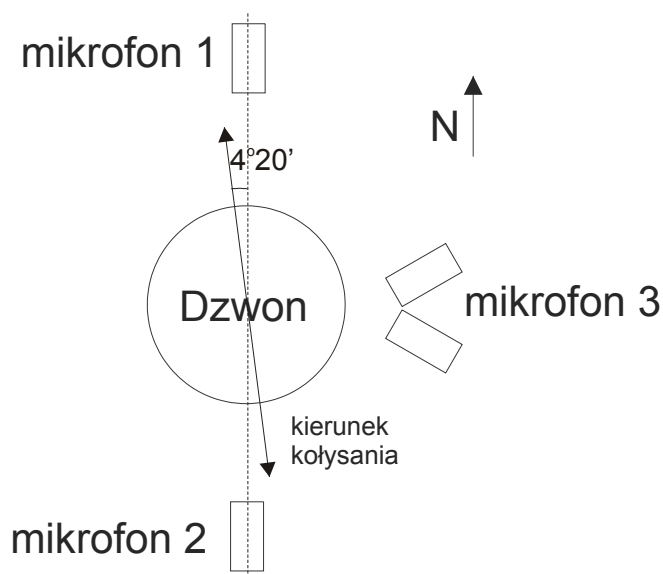


Rys. 4.4 Karta dźwiękowa na przykładzie Sound Blaster Live 1024 firmy Creative Labs. [7]

# Rozdział 5 Analiza dźwięku

## 5.1 Pomiary

W celu uzyskania widmo częstotliwościowe dzwonu Tuba Dei należało najpierw nagrać jego dźwięk. Jako że dzwon ten jest bardzo stary nie używa się go codziennie, a jedynie na specjalne okazje. Właśnie taką okazję należało wykorzystać na rejestrację. Z wyżej wymienionych powodów nie można było wcześniej dobrać wszystkich parametrów nagrywania takich jak wzmocnienie itp. Musiały więc one zostać dobrane już podczas właściwej rejestracji. Dzięki hojności pani Elżbiety Jakubowskiej, Dyrektora Wydawnictwa TNOiK, do nagrania udało się zaangażować specjalistę – mgra inż. Mariusza Zaczekowskiego, kierownika Studia Nagrań Akademii Muzycznej im. St. Moniuszki w Gdańsku. Samego nagrania dokonano 6 kwietnia 2002 roku. Użyto do tego czterech mikrofonów firmy Neumann podłączonych do rejestratora wielokanałowego Yamaha MD8, który zapisuje dźwięk na specjalne nośniki wielościeżkowe MD Data. Dwa mikrofony zostały ustawione po przeciwnych krańcach wieży w osi kołysania dzwonu, natomiast pozostałe dwa podłączone do jednego kanału rejestrowały dźwięk rozchodzący się prostopadłe do osi kołysania Tuba Dei (Rys 5.1). Odległość mikrofonów od dzwonu wynosiła ok. 5 m.



Rys. 5.1 Schematyczne przedstawienie układu mikrofonów.

Wyniki następnie zostały przez mgra inż. Zaczekowskiego przetworzone do postaci plików .wav, czyli powszechnego standardu cyfrowego zapisu dźwięków stosowanego w komputerach klasy PC. Ważna jest tutaj częstotliwość próbkowania, która wynosiła 44,1 kHz czyli w jakości jaką prezentują płyty CD Audio. Częstotliwość ta jest szczególnie ważna dla dalszych pomiarów ze względu na twierdzenie Shannona o próbkowaniu, o czym wspomniano już w rozdziale 4.

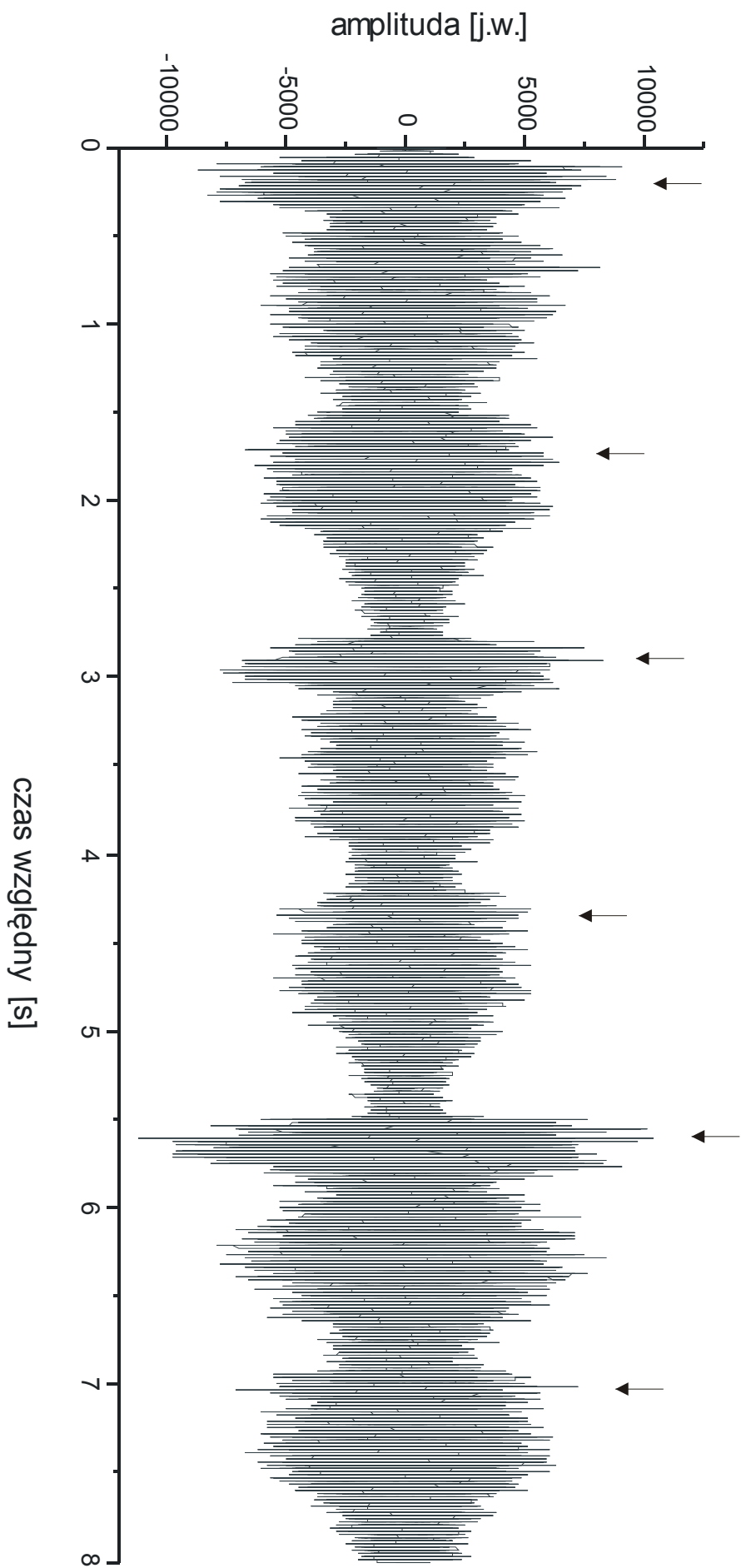
Przy tak wysokiej jakości nagrania otrzymanie w pełni satysfakcjonującego widma nie stanowi większego problemu. W tym celu skorzystano z demonstracyjnej wersji programu firmy Syntrillium Software Corporation o nazwie Cool Edit 2000 oraz programu firmy Microcal pt. Orgin 5.0. Sam Cool Edit 2000 służył do drobnej edycji plików oraz do wybierania, wycinania oraz eksportowania do formatu ASCII plików pochodzących z nagrania. Natomiast Orgin 5.0 był właściwym narzędziem służącym zarówno do wykonywania analizy FFT (Fast Fourier Transform) jak również do sporządzania wszelakich wykresów oraz dopasowań.

## 5.2 Widmo ogólne

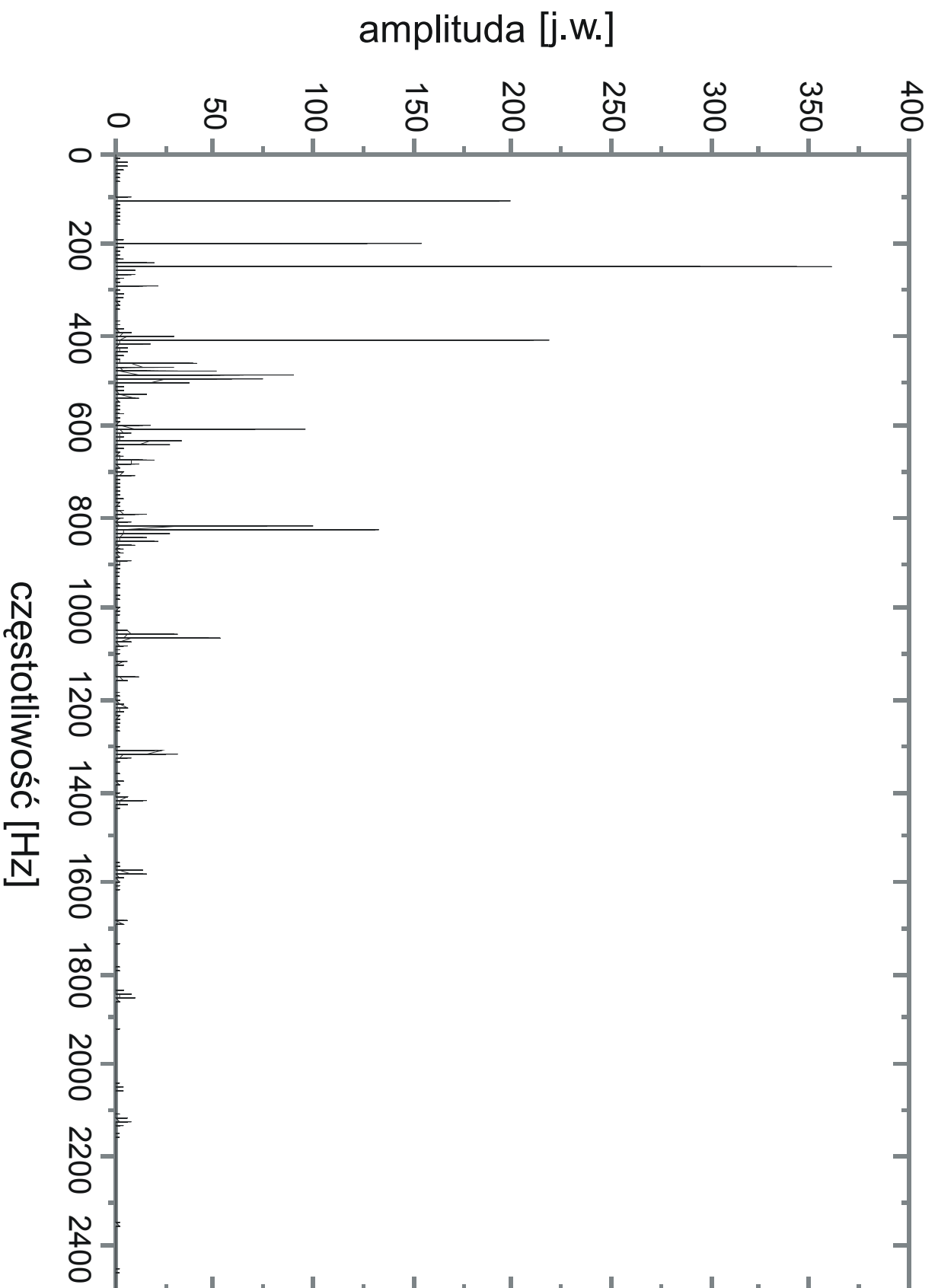
Aby przekonać się jakie częstotliwości składają się na dźwięk dzwonu należało przeanalizować za pomocą szybkiej transformaty Fouriera jak największą porcję danych. Niestety, nie udało się dokonać analizy całego nagrania ponieważ porcja danych do analizy po przetworzeniu do postaci ASCII była po prostu za duża (ok. 200MB) i samo jej otwieranie przez Orgin'a trwało ok. 2 godzin, natomiast przy próbie analizy nastąpiło zawieszenie systemu operacyjnego. Najdłuższym odcinkiem, którego analizę otrzymano był 38,117 sekundowy wycinek nagrania, co odpowiadało dokładnie 28 uderzeniom dzwonu. Odcinek ten pochodził z kanału odpowiadającemu dwóm mikrofonom umieszczonym prostopadle do osi kołysania dzwonu<sup>1</sup>. Poniżej na rys. 5.2 umieszczono fragment nagrania oraz zaraz pod nim widmo otrzymane na drodze analizy FFT (Rys. 5.3) o zdolności rozdzielczej rzędu 0,03 Hz. Na osi y znajduje się skala amplitudowa będąca skalą względną, nie oddaje ona jednak w pełni natężenia dźwięku jakie jest odbierane przez ludzkie ucho. Jest tak ponieważ człowiek dla różnych częstotliwości o tym samym natężeniu różnie odbiera wrażenie głośności, wynika to z anatomii ludzkiego ucha. Jak łatwo zauważyć (Rys. 5.3) widmo mieści się właściwie w granicach 0 do 1000 Hz czyli w granicach tonów niskich.

---

<sup>1</sup> Odpowiada to plikowi audio3.wav dołączonemu na płycie CD. Początek próbki 1:13,853, koniec 1:51,970.



Rys. 5.2 Reprezentacyjny fragment nagrania. Strzałkami zaznaczono uderzenia serca (mikrofon 3).



Rys. 5.3 Widmo otrzymane w wyniku analizy kolejnych 28 uderzeń dzwonu ( $1,68 \times 10^6$  próbek).



Wysokość brzmienia dzwonu określa oktawa dolna (częstotliwość 101,55 Hz), w przypadku Tuba Dei odpowiada ona dość dokładnie tonowi Gis. Natomiast tonacja w jakiej słyszymy głos Tuba Dei jest zbliżona do molowej, jak to ma miejsce w większości starych wielkich dzwonów, np. Zygmunt [10]. Potwierdza się również teoria która mówi, że widmo dźwięku dzwonu jest liniowe. W przypadku dzwonu Tuba Dei można wyróżnić wszystkie składowe wspomniane w rozdziale 3 i opisane w tabeli 3.1. Poniżej w tabeli 5.1 zebrano dokładne wartości odczytanych częstotliwości wraz z ich nazwami, oraz wielkością  $k$  którą można nazwać wielokrotnością harmoniczną, mówiącą o tym w jakim stosunku (teoretycznie) pozostają do siebie dane częstotliwości. W następnej kolumnie znajdują się odchylenia wyznaczonych częstotliwości ( $\Delta f$ ), wyznaczono je dopasowując metodą regresji liniowej prostą, a następnie wyznaczając różnicę między wartością wyliczoną, a wartością odczytaną. Dopasowanie wykonano dla dwóch przypadków:  $y=A+Bx$  oraz  $y=Bx$ .

Odchylenia mówią o zestrojeniu wewnętrznym dzwonu. Wyniki analiz sugerują w tej kwestii podobieństwo pomiędzy Tuba Dei a Zygmuntem. Suma kwadratów odchyleń wynosi dla Tuba Dei 739,30 (dla modelu  $y=Bx$ : 2536,68) natomiast dla Zygmunta 1368,35 zaś dla Jerzego 437,14 [10]. Jak widać toruński dzwon plasuje się pod tym względem pośrodku, należy jednak pamiętać że Tuba Dei z całej trójki jest najstarszy, podczas gdy Jerzy pochodzi z 1988 roku.

Tabela 5.1 Częstotliwości odczytane z widma i ich analiza.

Lp.	k	Nazwa	f [Hz]	y=A+Bx		y=Bx	
				f oblicz. [Hz]	$\Delta f$ [Hz]	f oblicz. [Hz]	$\Delta f$ [Hz]
1	2	oktawa dolna (Gis)	101,55	93,44	8,11	103,00	-1,45
2	4	Pryma	199,34	196,27	3,07	206,01	-6,67
3	5	tercja mała	248,12	247,68	0,44	257,51	-9,38
4	6	Kwinta	291,09	299,10	-8,01	309,01	-17,92
5	8	Oktawa	408,24	401,93	6,31	412,01	-3,77
6	10	Decyma	487,04	504,76	-17,72	515,01	-27,98
7	12	duodecyma	602,76	607,59	-4,83	618,02	-15,26
8	16	podw. oktawa	825,88	813,25	12,63	824,02	1,86
9	21	?	1062,40	1070,32	-7,93	1030,03	32,37

Wynikiem dopasowania były dwa współczynniki  $A$  i  $B$  które spełniają równanie:

$$f = A + Bk \quad (5.1)$$

Ich wartość została wyznaczona przy pomocy programu Origin i wyniosła odpowiednio:

$$A = (-9,4 \pm 7,9) \text{ Hz}$$

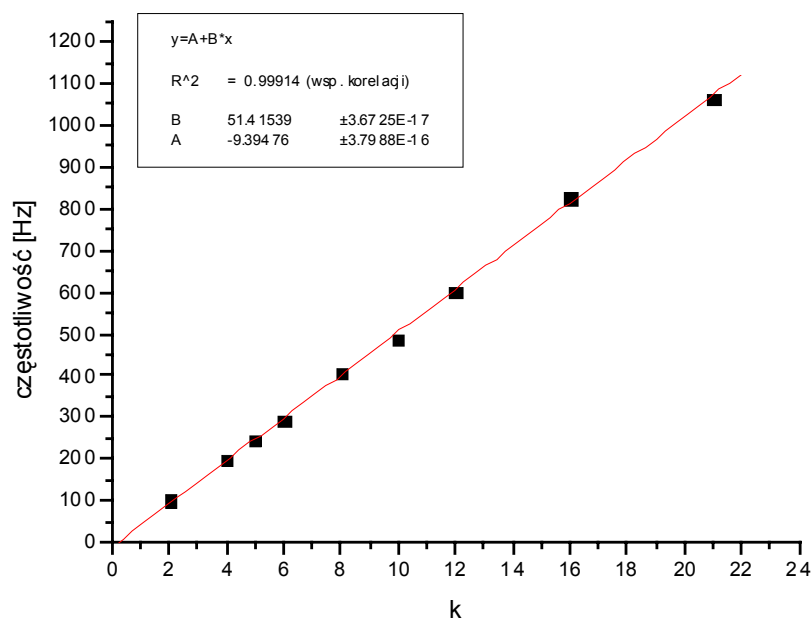
$$B = (51,4 \pm 0,9) \text{ Hz}$$

wartość niepewności wyznaczenia współczynnika  $A$  może wydawać się bardzo duża w stosunku do jego wartości, należy jednak pamiętać że mamy do czynienia z setkami herców, a współczynnik ten mówi jedynie o tym jak przesunięta jest prosta względem środka układu współrzędnych. Natomiast wymuszając  $A=0$  otrzymano:

$$B = (51,5 \pm 0,6) \text{ Hz}$$

Jednak w tym przypadku jakość dopasowania była nieco gorsza:  $R^2=0,9967$  w porównaniu z wartością  $R^2=0,9991$  dla prostej  $y=A+Bx$

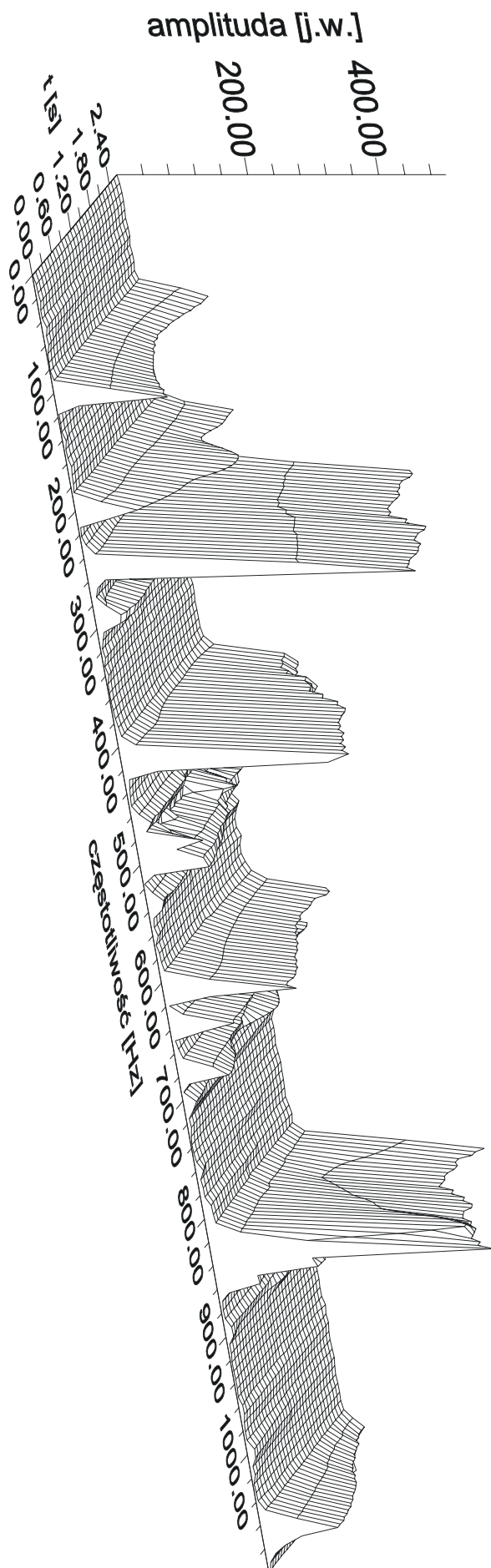
Poniżej, na rys. 5.4 przedstawiono wynik wykonanego dopasowania. Jak widać wypadło ono bardzo dobrze, co oznacza że odczytane częstotliwości pozostają do siebie z dobrym przybliżeniem w stosunku harmonicznym. W widmie pojawia się również dziewiąta składowa jednak o jej istnieniu nie wspomina żadna literatura fachowa dlatego nie została ona oznaczona żadną nazwą. Jej występowanie w widmie Tuba Dei zostało dokładnie sprawdzone i jest niezaprzeczalnym faktem.



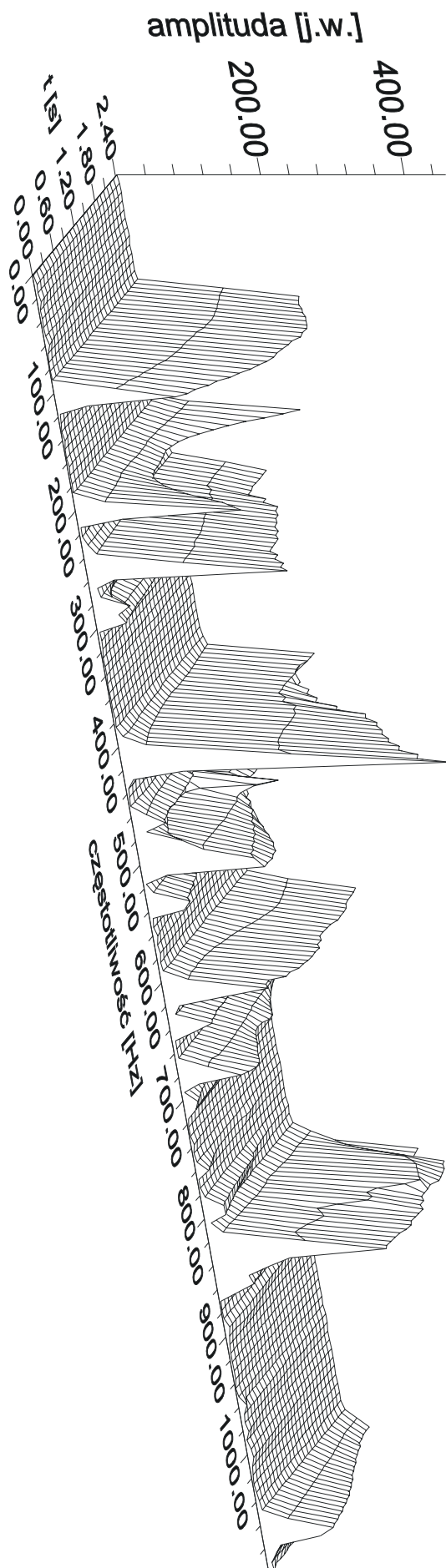
Rys. 5.4 Dopasowanie liniowe funkcji częstotliwości w dziedzinie  $k$ , symbolem ■ oznaczono wyniki pomiarowe, linią przewidywaną zależność modelową  $y=A+Bx$ .

### 5.3 Widmo ewolucyjne

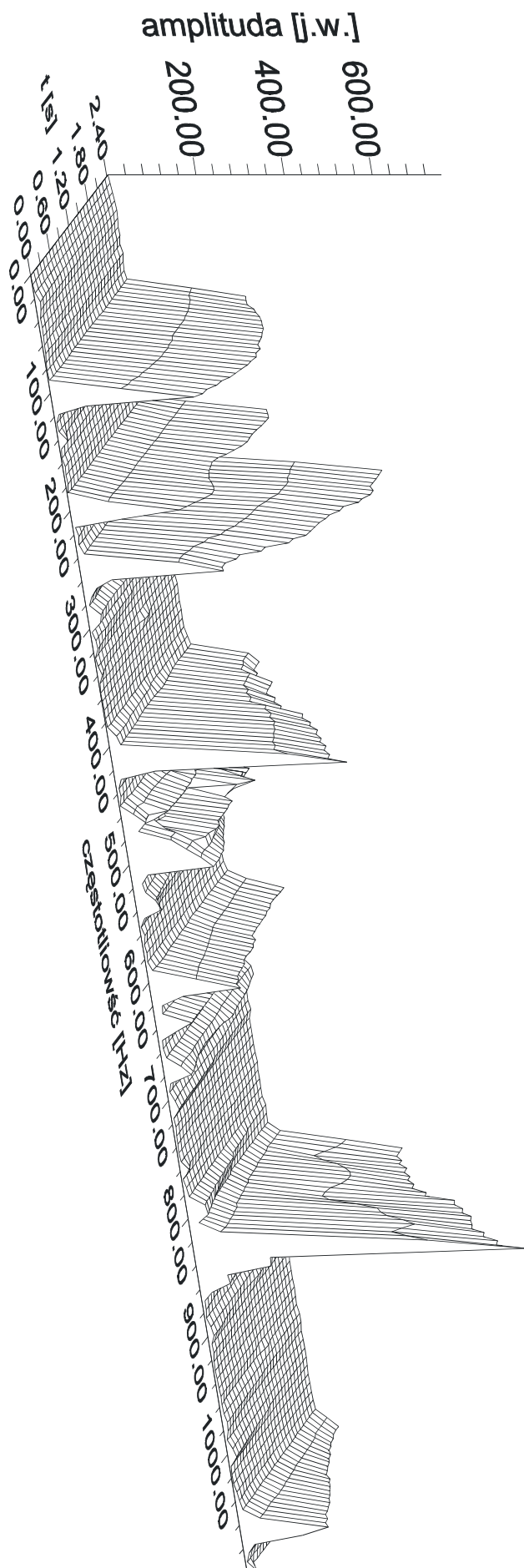
Następnym krokiem było sporządzenie tak zwanego widma ewolucyjnego. Poległo to na pobraniu pewnej ilości małych próbek podczas jednego uderzenia dzwonu i następnie przedstawieniu wyników na trójwymiarowym wykresie odkładając na kolejnych osiach częstotliwość, amplitudę oraz czas. Jednak zanim przejdziemy do przedstawienia wyników należy omówić bardzo ważną rzecz. Otóż ze względu na swoje zawieszenie dzwon Tuba Dei nie bije symetrycznie, lecz uderzenia po stronie północnej są mocniejsze. Wynikać to może z operacji obrócenia dzwonu w 1906 roku o  $90^\circ$  i modyfikacji zawieszenia serca. W efekcie belka utrzymująca dzwon nie jest idealnie wypoziomowana, zachodni koniec jest o 6mm wyżej niż wschodni [2]. Skutkiem tego serce nie porusza się dokładnie w płaszczyźnie kołysania dzwonu, a jest skręcone o około  $4^\circ 20'$  na wschód, gdy stoimy przed dzwonem z twarzą zwróconą na południe (por. Rys. 5.1). Prawdopodobnie to właśnie jest przyczyną mocniejszego uderzenia od strony północnej. Wyjątkowość dzwonu Tuba Dei polega również i na tym, że dzwon ten posiada nożny mechanizm bujania. W czasie kołysania dzwonu serce porusza się w ślad za kielichem, uderzając we wieniec w momencie skrajnego wychylenia. Na podstawie analizy nagrania stwierdzono, że odstęp czasu pomiędzy uderzeniami serca jest dość regularny i wynosi: po mocniejszym uderzeniu 1,5 s, zaś po słabszym 1,2 s. Poniżej przedstawiono widma ewolucyjne dwóch kolejnych uderzeń: piętnastego i szesnastego z kolei, nagrane z mikrofonów od strony północnej (Rys. 5.5) i południowej (Rys. 5.6) oraz z mikrofonu umieszczonego prostopadle do osi kołysania dzwonu (Rys 5.7)



Rys. 5.5 Widmo ewolucyjne dwóch kolejnych uderzeń zarejestrowane od strony północnej. (mikrofon 1)



Rys. 5.6 Widmo ewolucyjne dwóch kolejnych uderzeń zarejestrowane od strony południowej. (mikrofon 2)



Rys. 5.7 Widmo ewolucyjne dwóch kolejnych uderzeń zarejestrowane od strony wschodniej. (mikrofon 3)

Widma te zostały zarejestrowane w kolejnych odcinkach czasowych co 0,2s z uwzględnieniem tego że drugie uderzenie zaczyna się 1,436 s po nastąpieniu pierwszego (czasy te zostały oczywiście określone orientacyjnie i są unikalne dla każdego uderzenia). Także reasumując na każde uderzenie przypadło 6 próbek o szerokości 0,2 s co daje 12 próbek na jeden wykres. Obserwując obydwie widma bardzo łatwo zauważyć efekt związany z kołysaniem dzwonu. Pryma (ton uderzeniowy 199 Hz) zarejestrowana od strony północnej (Rys. 5.5) po pierwszym uderzeniu zanika, a po drugim (poczynając od 1,436 s) narasta. Natomiast od strony południowej (Rys. 5.6) ewolucja tonu uderzeniowego wygląda wręcz przeciwnie. Powodem tego jest ruch dzwonu: po pierwszym uderzeniu po stronie północnej porusza się on w kierunku mikrofonu 2, po drugim uderzeniu następuje zmiana kierunku ruchu. Warto w tym miejscu zauważyć, że ewolucja tonu oktawy dolnej (101 Hz) przebiega całkiem odwrotnie. Wydają się, że przebiegi czasowe tonów 101 Hz i 199 Hz są przeciwne w fazie. Może to mieć związek z fazami nabrzmiewania i wybrzmiewania poszczególnych tonów, związanych z przekazywaniem energii pomiędzy modami drgań dzwonu.

Jednak nie wszystkie składowe zachowują się podobnie. Przyjrzyjmy się bliżej oktawie (408 Hz) Na całej długości obu widm jej amplituda maleje, sugeruje to że składowa ta pojawia się w momencie uderzenia, a następnie szybko wybrzmiewa ustępując pola innym częstotliwościom. Zachowanie takie jest bardzo charakterystyczne dla dzwonów i wynika z ich budowy.

## 5.4 Efekt Dopplera

Dzwon Tuba Dei jest dzwonem kołysanym co oznacza że dźwięk wydobywany jest poprzez wprawienie go w ruch. Tak więc mamy do czynienia z przesunięciem częstotliwości względem rzeczywistej właśnie na skutek w/w ruchu zgodnie ze zjawiskiem Dopplera (roz. 2.2):

$$\frac{f}{f_0} = \frac{v}{v \mp v_z} \quad (5.2)$$

w którym  $f$  jest częstością odbieraną,  $f_0$  częstością emitowaną przez źródło,  $v_z$  prędkością dzwonu. Znak minus stosujemy gdy dzwon zbliża się do mikrofonu, natomiast znak plus gdy się oddala. W przypadku Tuba Dei efekt Dopplera jest jednak trudny do zaobserwowania na skutek małej prędkości ruchu dzwonu jak również niskich częstotliwości składowych występujących w widmie. Dlatego aby wykryć to zjawisko porównano nagranie tego samego uderzenia z dwóch mikrofonów ustawionych wzdłuż osi kołysania po przeciwnych stronach

dzwonu. Częstotliwości tonów zarejestrowanych przez oba mikrofony odpowiadają sytuacji, w której prędkość dzwonu byłaby dwukrotnie większa od rzeczywistej. W ten sposób badano uderzenie 12 (0:17,242 w audio1 oraz 0:24,846 w audio2) oraz uderzenie 8 (0:09,125 w audio1 oraz 0:19,409 w audio2). Oba uderzenia analizowano przy pomocy okna Hanninga aby wyeliminować obecność listków bocznych, jednak mimo to pojawiały się poboczne częstotliwości co sprawiało kłopoty w odczytaniu właściwego przesunięcia. Otrzymane wyniki zebrano w tabeli 5.2 i 5.3, gdzie:  $f_1$  oznacza częstotliwość zarejestrowaną przez mikrofon nr 1,  $f_2$  - mikrofon nr 2.

Tabela 5.2 Efekt Dopplera dla uderzenia 12.

$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$\Delta f$ [Hz]
102,28	102,28	0
198,51	199,86	1,35
247,63	248,98	1,35
290,03	291,38	1,35
408,47	411,16	2,69
496,62	499,99	3,37
602,27	607,65	5,38
820,98	827,03	6,05

Tabela 5.3 Efekt Dopplera dla uderzenia 8.

$f_1$ [Hz]	$F_2$ [Hz]	$\Delta f$ [Hz]
101,61	102,28	0,67
198,51	199,86	1,35
248,31	248,31	0
291,38	291,38	0
408,47	410,49	2,02
496,62	499,99	3,37
602,27	606,98	4,71
820,98	827,03	6,05

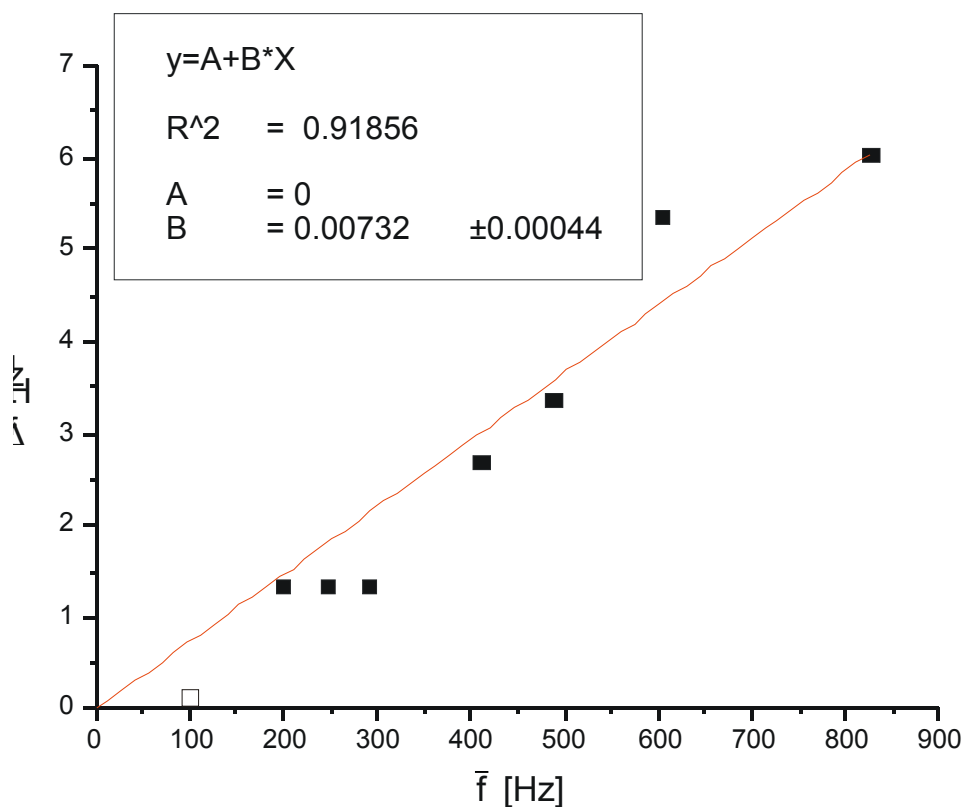
Jak widać nie pokrywają się one całkowicie z teorią ponieważ przy założeniu że dzwon porusza się z prędkością ok. 1 m/s dla częstotliwości 100 Hz przesunięcie powinno być rzędu 0,6 Hz. Niestety nie udało się go zaobserwować dla uderzenia 12, natomiast w przypadku uderzenia 8 nie zaobserwowano przesunięcia dla 248 Hz i 291 Hz. Również obserwowane jednakowe przesunięcie dla 198 Hz, 247 Hz oraz 290 Hz (uderz. 12) nie jest zgodne z teorią. Przyczyną tego mogą być wspomniane listki boczne jak również ograniczenia długości odcinka czasu jaki może być pobrany do analizy. Wiąże się z tym ograniczenia rozdzielczości w widmie częstotliwości do wartości równej odwrotności długości czasu nagrania poddanego analizie. W tym przypadku (analizie poddano fragmenty nagrania odpowiadające odstępowi pomiędzy uderzeniami trwające około 1,4 s) jest to wielkość:  $\sigma_f \approx 0,7$  Hz. Należy wziąć również pod uwagę fakt, że w rozważanym odcinku czasu dzwon nie porusza się ze stałą prędkością względem mikrofonów. Dokładniejszą analizę tego zagadnienia przedstawiono na końcu rozdziału, po prezentacji wyników.



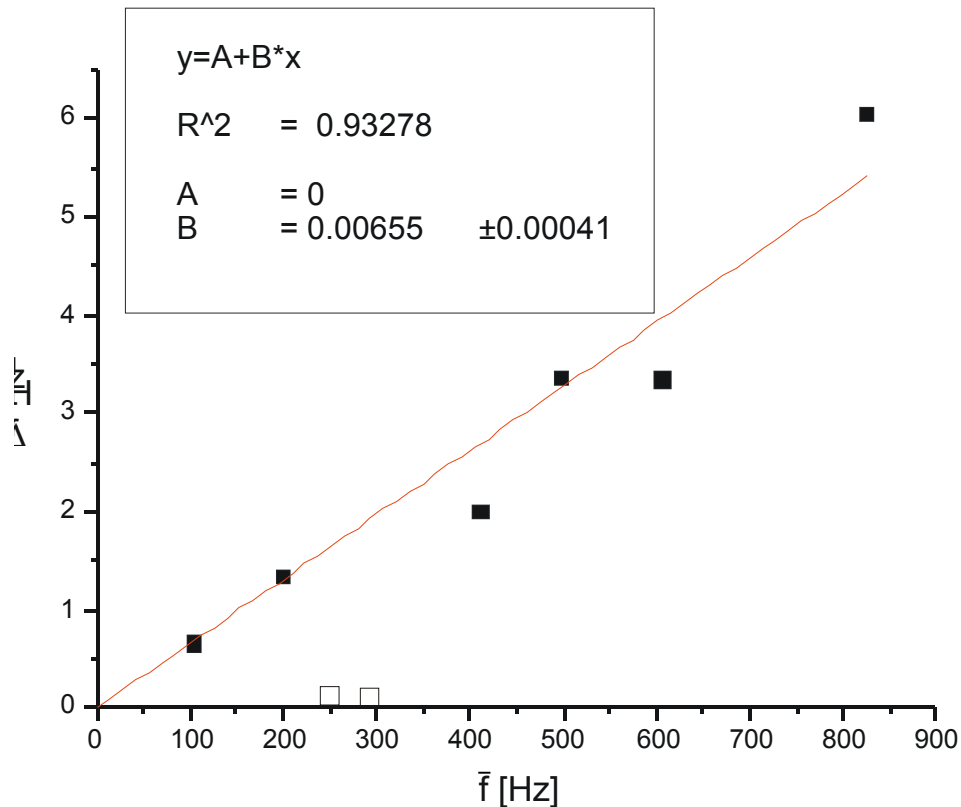
Korzystając ze wzoru (5.2) można wyznaczyć prędkość dzwonu.. Oznaczając częstotliwość zarejestrowaną przez mikrofon nr 1 jako  $f_1$ , zaś mikrofon nr 2 jako  $f_2$  otrzymamy:  $\Delta f = f_2 - f_1$  oraz  $\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$  i dalej:

$$\Delta f \approx 2 \frac{v_z}{v} \bar{f}. \quad (5.3)$$

Stosując metodę regresji liniowej  $y = A+Bx$  i kładąc  $A = 0$  (przesunięcie dla zerowej częstotliwości winno wynosić zero), oraz przyjmując prędkość dźwięku w powietrzu  $v = 343.8$  m/s wyznaczono prędkość dzwonu  $v_z$ . Poniżej na rys. 5.8 przedstawiono efekt dopasowania linii prostej do danych z tabeli 5.2, w którym pominięto jedynie zerowe przesunięcie dla częstotliwości 102 Hz. Natomiast rys. 5.9 zawiera dopasowanie dla tabeli 5.3 z pominięciem zerowych przesunięć dla 248 Hz i 291 Hz.



Rys 5.8 Dopasowanie liniowe zgodne ze wzorem 5.3 dla uderzenia 12.



Rys 5.9. Dopasowanie liniowe zgodne ze wzorem 5.3 dla uderzenia 8.

W dopasowaniu dla uderzenia 12 otrzymano wartość:

$$B = (0,0073 \pm 0,0005),$$

co w efekcie daje wynik:

$$v_z = (1,25 \pm 0,09) \text{ m/s},$$

natomiast dla uderzenia 8 odpowiednio:

$$B = (0,0066 \pm 0,0005),$$

oraz:

$$v_z = (1,13 \pm 0,08) \text{ m/s},$$

błąd wyznaczono metodą różniczki zupełnej. Należy jednak pamiętać, że wyznaczona w ten sposób wielkość  $v_z$  jest jedynie uśrednioną w czasie wartością rzutu prędkości  $v_{dzwonu}$ , z jaką dzwon pokonuje drogę od uderzenia do uderzenia, na linię łączącą oba mikrofony. Otrzymane wyniki dość dobrze zgadzają się z szacowną na podstawie obserwacji średnią prędkością liniową dzwonu:  $\langle v_{dzwonu} \rangle > 2 \text{ m/s}$  (odstęp czasu między uderzeniami  $\sim 1,5 \text{ s}$ , wysokość dzwonu  $\sim 2 \text{ m}$ , amplituda wychylenia  $\sim 45^\circ$ ).

## Zakończenie i wnioski

Celem pracy była analiza dźwięku największego średniowiecznego dzwonu w Polsce - Tuba Dei. Okazało się, że cenny zabytek sztuki ludwisarskiej może być przedmiotem badań nie tylko historycznych, ale również interesujących analiz fizycznych. Stwierdzono dobrą jakość wewnętrznego zestrojenia dzwonu, opisaną ilościowo jako odchylenie poszczególnych tonów od wartości harmoniczných. Pogłos jest kolejną ważną wielkością opisującą jakość dzwonów. W przypadku Tuba Dei czas wybrzmiewania ostatniego, najsłabszego uderzenia trwał blisko 10 sekund.

Jak widać z roz. 5.1 widmo uzyskane jest bardzo zbliżone do oczekiwanych wartości teoretycznych. Oznacza to że wszystkie przybliżenia stosowane w opisie teoretycznym są całkowicie wystarczająco dokładne. Łatwo zauważyć również że wszystkie częstotliwości są z całkiem niezłym (jak na 7,5 tonowy dzwon) przybliżeniem harmonicznymi wielokrotnościami częstotliwości 50 Hz. Widmo to również doskonale ilustruje jak niskie tony wydawane są przez dzwony wielkie. Dzięki takiej właśnie barwie dzwony mimo bardzo donośnego dźwięku nie ogłuszają nawet dzwonników, za to ich dźwięk niesie się bardzo daleko.

Drugą rzeczą jest zmienne natężenie danych alikwotów w funkcji czasu. Nadaje to dźwiękowi specyficzny charakter, szczególnie dobrze można to zaobserwować na rys. 5.2 w przypadku uderzenia oznaczonego numerem pięć. Bardzo łatwo zaobserwować tam fazę nabrzmiewania oraz wybrzmiewania. Specyficznego charakteru dodaje Tuba Dei również niesymetria jego uderzeń jest ona w prawdzie niewielka ale nadaje jego brzmieniu unikatowy i niepowtarzalny charakter, co w przypadku takiego dzwonu jest raczej zaletą niż wadą.

Bardzo ważną funkcję pełni również opisywany na końcu efekt Dopplera. Jest on w prawdzie stosunkowo znikomy, ale jednak zauważalny. Jak wiadomo są dwa systemy mocowania dzwonów, stałe – dzwon jest nieruchomy natomiast drgania wzbudzone są za pomocą specjalnego młotka, oraz ruchome kiedy dzwon na skutek kołysania jest uderzany przez zamocowane w środku serce. Otóż ten drugi typ dzwonów jest postrzegany znacznie lepiej, ich dźwięk wydaje się być żywszy oraz bardziej głęboki. Człowiek o przeciętnym słuchu muzycznym nie jest w stanie co prawda odróżnić dźwięków odległych o kilka herców ale jak pokazuje praktyka jest w stanie to „odczuć” i dlatego jeśli efekt Dopplera nie jest czymś niepożądanym (np. Kariliony) to stosuje się raczej zawieszenie ruchome.

## Literatura

- [1] F.S. Crawford, *Fale*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972.
- [2] informacja ustna od inż. Dubowika, 1988.
- [3] S. Golachowski, M. Drobner: *Akustyka muzyczna*, Państwowe Wydawnictwo Muzyczne, Kraków 1953.
- [4] J. Izydorczyk, *Telefony – geneza problemu próbkowania*, Delta 7/2001 (326), ss.1-3.
- [5] T. Jaworski, M. Nasieniewski, K. Przegiętka (red.), *Tajemnice starych dzwonów Torunia i Chełmna, w 500- tną rocznicę ulania wielkiego Tuba Dei spisane*, Wydawnictwo TNOiK, Toruń 2001 (<http://www.phys.uni.torun.pl/~przeciu/ksiazka.htm>).
- [6] J. Josephs: *Fizyka dźwięku muzycznego*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Poznań 1970.
- [7] Z Łukasiak, *Skrypt do wykładu „Podstawy Techniki Komputerowej”*.
- [8] J. Moczko, L. Kramer *Cyfrowe metody przetwarzania sygnałów biomedycznych*, Wydawnictwo Naukowe, Poznań 2001.
- [9] P. Ody, *Skrypt do "Laboratorium Systemów Multimedialnych" Katedry Inżynierii Dźwięku Politechniki Gdańskiej*.
- [10] M. Sankiewicz, G. Budzyński, *Analizy dźwięku największych dzwonów w Polsce, XLIII Otwarte Seminarium z Akustyki, OSA' 96, 1996*.
- [11] W. Westcott *Bells and Their Music*, G.P. Putnam, New York 1970 (<http://www.msu.edu/~carillon/batmbook>).